

Sommario

Introduzione	ix
1 Impariamo a contare	1
1.1 Operazioni sugli insiemi finiti	1
1.1.1 Richiami di teoria degli insiemi	1
1.1.2 La cardinalità di un insieme finito	4
1.2 Sequenze, collezioni, spartizioni, scomposizioni e partizioni	5
1.3 Principi fondamentali	12
1.3.1 Principio di moltiplicazione	12
1.3.2 Principio di divisione	17
1.4 Spazi campionari e probabilità uniforme	19
1.5 Esercizi	21
2 Contare sequenze e collezioni	25
2.1 Sequenze e collezioni di elementi distinti	25
2.1.1 Sequenze senza ripetizione	25
2.1.2 Collezioni senza ripetizione (sottoinsiemi)	28
2.2 Sequenze e collezioni arbitrarie	38
2.2.1 Sequenze (con eventuali ripetizioni) e/o spartizioni	38
2.2.2 Collezioni (con eventuali ripetizioni) e/o risoluzioni di numeri naturali	39
2.2.3 Risoluzioni con vincoli e disequazioni	42
2.3 Esercizi	45
3 Vincoli di occupancy	51
3.1 Sequenze e spartizioni con vincoli di occupancy	51
3.1.1 Sequenze e spartizioni con sequenza di occupancy: permutazioni e anagrammi	51
3.1.2 Sequenze e spartizioni con collezione di occupancy	56
3.2 Collezioni e risoluzioni con vincoli di occupancy	58
3.2.1 Collezioni e risoluzioni con sequenza di occupancy	58
3.2.2 Collezioni e risoluzioni con collezione di occupancy	58
3.3 Numeri di Catalan	60
3.4 Esercizi	63

4	Inclusione/esclusione	67
4.1	Il principio di inclusione/esclusione	67
4.1.1	Cardinalità di unione di insiemi	67
4.1.2	Cardinalità di intersezioni di insiemi	71
4.2	Gli scombusolamenti	76
4.3	Esercizi	77
5	Partizioni, cicli e partizioni in cicli	81
5.1	Partizioni e numeri di Stirling	81
5.1.1	Il numero di n -partizioni di I_k	81
5.1.2	Partizioni con vincolo di occupancy	86
5.2	Cicli e partizioni in cicli	87
5.2.1	Cicli	87
5.2.2	Le n -partizioni in cicli di I_k	89
5.2.3	Partizioni in cicli con vincoli di occupancy	94
5.3	Esercizi	95
6	Manipolazione di somme	97
6.1	Alcune tecniche	97
6.1.1	Il metodo di Gauss	97
6.1.2	La tecnica di perturbazione	98
6.1.3	Il metodo delle derivate	99
6.2	Il calcolo finito	100
6.2.1	L'operatore differenza e le potenze fattoriali discendenti . . .	100
6.2.2	Primitive discrete e teorema fondamentale del calcolo discreto	103
6.2.3	Primitive discrete di alcune funzioni notevoli	105
6.3	La formula di addizione per parti	112
6.4	Il criterio di convergenza di Abel–Dirichlet	113
6.5	Esercizi	116
7	Serie formali e funzioni generatrici	119
7.1	Serie formali: prime definizioni	119
7.2	Funzioni generatrici di una successione	122
7.3	Serie formali composte e inverse	130
7.3.1	Somme infinite e composte di serie formali	130
7.3.2	Serie formali invertibili	135
7.4	Le forme chiuse di una serie formale	139
7.4.1	Serie formale di Maclaurin e forme chiuse di serie formali . .	139
7.4.2	Proprietà delle forme chiuse	142
7.4.3	Serie formali e convergenza: la forma chiusa somma	149
7.4.4	Forme chiuse di funzioni generatrici di successioni notevoli .	151
7.4.5	Forme chiuse razionali	160
7.5	Le funzioni generatrici di probabilità	166
7.6	Frazioni di serie formali	170

7.6.1	Numeri di Bernoulli	171
7.6.2	Equazioni di secondo grado in $\mathbb{R}[[X]]$	175
7.7	Esercizi	178
8	Calcolo simbolico	181
8.1	Insiemi con valutazione	181
8.2	Operazioni tra insiemi compatibili con le OGF	183
8.3	Pattern nelle stringhe	190
8.3.1	Il teorema della scimmia	197
8.4	Triangolazioni di un poligono convesso	198
8.5	Alberi con radice	201
8.6	Esercizi	205
9	Relazioni di ricorrenza	207
9.1	Definizioni di base e modelli	207
9.2	Relazioni lineari a coefficienti costanti	214
9.2.1	Relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti	216
9.2.2	Soluzioni particolari di una relazione di ricorrenza lineare	225
9.3	Relazioni lineari a coefficienti variabili	239
9.4	Relazioni “Dividi e Conquista”	242
9.5	Ricorrenze e funzioni generatrici	250
9.5.1	Ricorrenze lineari a coefficienti costanti e loro OGF	250
9.5.2	La OGF del Quicksort	260
9.6	Dimostrazioni	262
9.7	Esercizi	268
10	Formule di approssimazione e di asintoticità	275
10.1	Le formule di Eulero – Maclaurin di ordine 1 e 2	275
10.2	Stime asintotiche con gli “ O grande” e gli “ o piccolo”: nozioni di base	285
10.3	Versione asintotica delle formule di Eulero – Maclaurin di ordine 1 e 2	291
10.4	Approssimazione di somme di Cauchy	299
10.4.1	Il caso $0 < \alpha < 1$	299
10.4.2	Il caso $\alpha = 1$: le somme di Riemann	306
10.4.3	Il caso $\alpha > 1$	310
10.5	Lo sviluppo di Eulero – Maclaurin di ordine qualunque	312
10.5.1	I numeri armonici generalizzati	312
10.5.2	Polinomi di Bernoulli	315
10.5.3	La formula di Eulero – Maclaurin	319
10.5.4	Versioni asintotiche della formula di Eulero – Maclaurin	324
10.6	Approssimiamo il fattoriale e i binomiali	327
10.6.1	Successioni a due indici	328
10.6.2	La formula di Stirling	336

10.6.3	Funzioni e distribuzioni di Ramanujan	342
10.7	Esercizi	347
A	Tavole riassuntive	351
A.1	Principali formule della combinatoria	351
A.2	Formule per il calcolo di primitive/somme indefinite discrete	353
A.3	Forme chiuse di alcune serie formali di uso frequente	354
A.4	Approssimazioni ed asintoticità	356
	Bibliografia	357
	Indice analitico	361