

I think I may fairly make two postulata. First, That food is necessary to the existence of man. Secondly, That the passion between the sexes is necessary and will remain nearly in its present state.

*An Essay on the Principle of Population (1798)*

THOMAS R. MALTHUS (1766–1834)

## CAPITOLO I

# Equazioni differenziali

*Le equazioni differenziali permettono di studiare l'evoluzione di molti sistemi fisici di interesse nelle scienze naturali, sociali ed economiche. In molti casi, infatti, è possibile prevedere l'evoluzione futura di un fenomeno, a partire da uno stato attuale osservabile, attraverso un modello matematico. Molto spesso un tale modello prevede delle regole sulle modalità di variazione delle funzioni coinvolte nella descrizione del fenomeno e tali relazioni prendono appunto il nome di equazioni differenziali. In questo capitolo impareremo ad*

*utilizzare le equazioni differenziali in alcuni semplici contesti applicativi e a risolverle nei casi più elementari, attraverso numerosi esempi, rimandando una trattazione più sistematica e rigorosa delle equazioni differenziali al Capitolo VIII. In un corso di Analisi Matematica avanzato lo studio delle equazioni ordinarie può prendere inizio direttamente dalla trattazione teorica del Capitolo VIII, utilizzando il contenuto di questo capitolo a scopo esemplificativo e di esercitazione.*

**P**er studiare l'evoluzione nel tempo di un sistema fisico attraverso un suo modello matematico è naturale cercare di individuare le relazioni fra le variazioni delle quantità che lo descrivono, pensate come funzioni del tempo, e lo stato del sistema al momento attuale. Come sappiamo dal primo volume, l'operazione adatta a quantificare la velocità di variazione di una funzione è la derivazione. Una *equazione differenziale* è appunto un'equazione che contiene una funzione incognita e alcune sue derivate. Iniziamo con qualche semplice esempio.

► Il modello matematico di un fenomeno fisico viene individuato tipicamente attraverso considerazioni intuitive sulle qualità del fenomeno o a partire da una legge fisica basata sull'evidenza sperimentale, e consiste nella determinazione di un certo numero di quantità adatte alla descrizione del fenomeno (posizione, temperatura, densità, ...) e delle relazioni fra esse. Perciò, di norma, un modello matematico consiste in un insieme di funzioni che rappresentano gli stati possibili del sistema ed un certo numero di relazioni fra queste.

## § 1. Equazioni differenziali e modelli

### Modelli di crescita delle popolazioni

Supponiamo di conoscere il numero di individui  $p_0$  di una popolazione di (ad esempio) batteri ad un certo istante  $t = 0$  e di volerne prevedere

l'andamento demografico, vale a dire il numero di individui nel generico istante  $t$ . Indichiamo con  $p(t)$  tale numero. Per determinare la funzione incognita  $p$  dobbiamo fare delle ipotesi sul comportamento della popolazione, ipotesi che generalmente vengono dedotte sperimentalmente. Uno dei modelli più semplici assume che una popolazione cresca ad un tasso proporzionale al suo numero di individui. In effetti, se  $m$  ed  $n$  rappresentano i tassi percentuali rispettivamente di mortalità e natalità della popolazione (che supponiamo costanti) all'istante  $t$  muoiono  $mp(t)$  batteri e ne nascono  $np(t)$ . In generale, sappiamo che il tasso di crescita di una quantità dipendente dal tempo è semplicemente la derivata prima della quantità stessa. Ne segue che la funzione  $p$  deve soddisfare l'equazione differenziale

$$(1) \quad p'(t) = np(t) - mp(t) = kp(t),$$

dove abbiamo posto  $n - m = k$  (il tasso percentuale di crescita di  $p$ ). Questo modello è noto come la *legge di Malthus* (si veda il riquadro a pagina 5). Dobbiamo quindi trovare una soluzione della precedente equazione che soddisfi anche la *condizione iniziale*  $p(0) = p_0$ .

Ovviamente la funzione  $p(t) \equiv 0$  soddisfa le nostre richieste quando  $p_0 = 0$ : stiamo semplicemente dicendo che in assenza di batteri all'istante  $t = 0$  non ne possono nascere di nuovi! Supponiamo perciò  $p_0 > 0$  e cerchiamo delle soluzioni dell'equazione che non si annullino. Data la presenza di  $p'$ , per determinare  $p$  ci aspettiamo di dover eseguire una qualche operazione di integrazione. Se supponiamo  $p(t) \neq 0$  per ogni  $t$ , possiamo dividere i due membri della (1) per  $p(t)$  ottenendo

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = k.$$

Il Lettore attento avrà già riconosciuto a primo membro la derivata della funzione  $\ln|p(t)|$ . Otteniamo

$$\ln|p(t)| = \int \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \int k dt = kt + C.$$

La presenza della costante arbitraria di integrazione ci dice che l'equazione (1) ha infinite soluzioni; per selezionare quella richiesta possiamo sfruttare la condizione iniziale. Sostituiamo perciò  $t = 0$  e  $p(0) = p_0 > 0$  nella precedente equazione ottenendo

$$\ln p_0 = C.$$

Abbiamo perciò

$$\ln|p(t)| = kt + \ln p_0, \quad |p(t)| = e^{kt + \ln p_0} = e^{kt} e^{\ln p_0} = p_0 e^{kt}$$

e, ricordando che il numero di individui di una popolazione non può essere negativo, otteniamo la soluzione cercata:

$$p(t) = p_0 e^{kt}.$$

► Perciò  $p(0) = p_0$ .

► Stiamo facendo qui l'ipotesi che  $p$  sia una funzione derivabile. Poiché la funzione  $p(t)$  rappresenta un numero di individui, la dovremmo supporre a valori interi. Ne seguirebbe che  $p$ , quando non costante, non sarebbe certo una funzione continua, né tantomeno derivabile. Il fatto di assumere, come facciamo, che  $p$  assuma valori non necessariamente interi implica che  $p$  sia un'approssimazione del numero di individui.

► Al momento non c'è motivo per ritenere che se  $p_0 \neq 0$  allora  $p(t) \neq 0$  per ogni  $t$  (cioè che la popolazione non possa estinguersi). Ritroveremo tale risultato a posteriori, dopo aver risolto l'equazione.

► Eseguendo il cambiamento di variabili  $P = p(t)$  otteniamo  $dP = p'(t) dt$  e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{p'(t)}{p(t)} dt &= \int \frac{1}{P} dP \\ &= \ln|P| + C \\ &= \ln|p(t)| + C. \end{aligned}$$

► In altre parole, per prevedere l'evoluzione di un fenomeno non è sufficiente sapere come si evolve, ma serve conoscere il suo stato iniziale.

► O meglio scartando la soluzione (negativa)  $p(t) = -p_0 e^{kt}$ , che non soddisfa  $p(0) = p_0$ .

La popolazione dunque aumenta esponenzialmente se  $k > 0$ , cioè se il tasso di natalità è maggiore di quello di mortalità e si estingue esponenzialmente quando si verifica la situazione opposta; nel caso, estremamente improbabile, in cui natalità e mortalità si compensino esattamente ( $k = 0$ ), la popolazione rimane costante nel tempo (si veda la Figura I.1).

La situazione è sostanzialmente analoga se supponiamo che i tassi di natalità e mortalità varino nel tempo, ad esempio per effetto dell'alternanza luce-buio o del susseguirsi delle stagioni (si veda anche l'Esercizio 1 a pagina 29). Il modello in cui il tasso percentuale di crescita di  $p$  è costante, vale a dire quando  $p'(t)/p(t) = k$ , è realistico solo in condizioni ideali (ambiente illimitato, nutrimento adeguato, ...). Se le risorse sono limitate è ragionevole attendersi che la popolazione possa crescere esponenzialmente solo in presenza di pochi individui, e comunque mai arbitrariamente. Possiamo modificare il nostro modello supponendo che il tasso percentuale di crescita non sia costante, ma diminuisca al crescere di  $p$ . Una possibile scelta è richiedere che  $p$  soddisfi l'equazione

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = k - hp(t),$$

o equivalentemente

$$(2) \quad p'(t) = p(t)(k - hp(t)),$$

dove  $k, h$  sono costanti positive. Questa equazione è detta *equazione logistica*; venne proposta dal matematico belga Pierre-François Verhulst nel XIX secolo come modello per studiare la crescita della popolazione mondiale (si veda il riquadro a pagina 5). Risolveremo nei dettagli l'equazione logistica nell'Esercizio (I.1) a pagina 18, per ora ci limitiamo a descriverne alcune proprietà qualitative. Osserviamo innanzitutto che le funzioni costanti  $p(t) \equiv 0$  e  $p(t) \equiv k/h$  risolvono l'equazione. Queste soluzioni sono dette *di equilibrio*, nel senso che se il dato iniziale  $p_0$  vale 0 oppure  $k/h$  allora il numero di individui non varia nel tempo. Se  $0 < p_0 < k/h$  allora il secondo membro della (2) è positivo, perciò  $p'(0) > 0$  e la popolazione cresce; viceversa se  $p_0 > k/h$ ,  $p'(0) < 0$  e la popolazione decresce. Notiamo che, in entrambi i casi, se la popolazione si avvicina alla quantità  $k/h$ ,  $p'$  tende a zero, cioè la popolazione tende a stabilizzarsi. Dunque ci aspettiamo che le soluzioni dell'equazione logistica abbiano grafici del tipo illustrato in Figura I.1 (a destra). La quantità  $k/h$  viene detta *capacità dell'ambiente*.

## Equazioni del moto

Consideriamo un oggetto libero di muoversi lungo una retta, ad esempio l'asse delle  $x$  di un piano cartesiano, ed indichiamo con  $x(t)$  la sua posizione all'istante  $t$ . Allora la sua *velocità* è definita come tasso di variazione della posizione, l'*accelerazione* come tasso di variazione della velocità:

$$v(t) = x'(t), \quad a(t) = v'(t) = x''(t).$$

► Abbiamo veramente risolto il problema di partenza? In effetti abbiamo trovato l'espressione di *una* soluzione, ma a priori potrebbero essercene delle altre. Come vedremo può capitare di avere diverse soluzioni per la stessa equazione differenziale con lo stesso dato iniziale, anche se non è questo il caso (si veda a questo proposito l'Esercizio 25 a pagina 31). Quando l'equazione modella un fenomeno reale è auspicabile che ad ogni dato iniziale corrisponda una unica soluzione.

► Altri modelli di crescita delle popolazioni sono descritti e studiati negli Esercizi 8 e 9 alla fine del capitolo.

► Infatti queste due costanti sono quelle che annullano il secondo membro e allo stesso tempo hanno ovviamente derivata nulla.

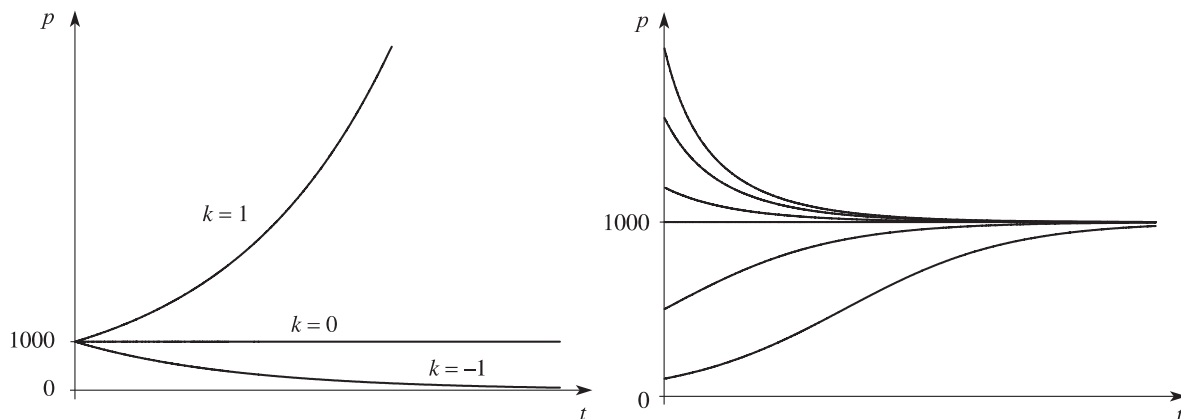


FIGURA 1.1: i grafici a sinistra rappresentano il numero di individui di una popolazione  $p(t)$ , che si evolve secondo la legge di Malthus,  $p'(t) = kp(t)$ . Abbiamo supposto che al tempo  $t = 0$  ci fossero 1000 individui e considerato  $k = 1$ ,  $k = 0$  e  $k = -1$ . A destra invece alcune soluzioni dell'equazione logistica,  $p'(t)/p(t) = k - hp(t)$ , quando  $k = 1$ ,  $k/h = 1000$ , al variare del numero di individui al tempo  $t = 0$ .

In assenza di attrito, se l'oggetto è sottoposto ad una forza di intensità costante  $f$  (diretta lungo l'asse  $x$ ) allora la sua accelerazione è costante ed è data dalla Legge di Newton, ovvero

$$x''(t) = a(t) \equiv \frac{f}{m}.$$

Integrando successivamente deduciamo

$$x'(t) = v(t) = \frac{f}{m}t + C_1 \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{f}{2m}t^2 + C_1t + C_2,$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie. Per determinarle abbiamo bisogno di conoscere dei dati supplementari. Ad esempio possiamo fissare la posizione e la velocità del corpo ad un certo istante  $t_0$ ; supponendo  $t_0 = 0$  e imponendo  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  otteniamo

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = x_0$$

e quindi

$$x(t) = \frac{f}{2m}t^2 + v_0t + x_0.$$

Se la forza  $f(t)$  dipende dal tempo si può procedere allo stesso modo a patto di saper calcolare gli integrali coinvolti.

Un caso frequente che non è trattabile come i precedenti è quello in cui la forza che agisce sull'oggetto dipende dalla posizione e/o dalla velocità dell'oggetto stesso, che sono incognite. Supponiamo per esempio che la forza sia esercitata da una molla e che il corpo sia in posizione di

► Si intende "l'intensità dell'accelerazione", infatti l'accelerazione è un vettore parallelo alla forza, quindi diretto lungo l'asse  $x$ .

► In questo caso per determinare il moto dell'oggetto, cioè per selezionare una soluzione dell'equazione di partenza, abbiamo bisogno di due condizioni, cioè di tante condizioni quante sono le costanti di integrazione. Risulta naturale imporle misurando la posizione  $x$  e la velocità  $x'$  nello stesso istante  $t_0$  di inizio dell'esperimento.

► Ottenendo

$$x'(t) = v(t) = \int_0^t f(s) ds + v_0$$

e

$$x(t) = \int_0^t \left( \int_0^s f(u) du \right) ds + v_0t + x_0.$$

## Malthus e Verhulst: la nascita della dinamica delle popolazioni

La prima versione di *An Essay on the Principle of Population* fu pubblicata in forma anonima nel 1798. L'autore fu presto identificato nel reverendo inglese Thomas Robert Malthus (1766–1834). Anche se questo non è il primo libro sullo studio della teoria delle popolazioni è senza dubbio il più celebre. L'autore prende spunto da due postulati (quelli con cui abbiamo aperto questo capitolo) e ne ricava una teoria quantitativa per lo sviluppo della popolazione umana: “Assuming then my postulata as granted, I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the earth to produce subsistence for man. Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio”.



Nel linguaggio odierno, le argomentazioni di Malthus asseriscono che la crescita di una popolazione, se incontrollata, è di tipo esponenziale, mentre l'economia agraria cresce solo in modo lineare; se ciò avviene per un sufficiente periodo di tempo, la crescita della popolazione sopravanza quella delle risorse. Da questo Malthus conclude che la crescita della popolazione umana viene naturalmente controllata dalla miseria, dal vizio e simili. Ogni fase di crescita incontrollata (come potrebbe accadere nel caso di emigrazione in nuove colonie, come il continente americano ai tempi di Malthus, oppure in seguito a guerre ed epidemie) deve essere seguita da una “cata-

strofe” (la *catastrofe malthusiana*, appunto) che quindi può essere vista come direttamente causata dalla crescita indiscriminata della popolazione. Uno degli effetti del libro di Malthus fu quello di alimentare la discussione sulla grandezza della popolazione britannica, fino a portare al *Census Act* del 1800, che istituì il censimento decennale degli abitanti della Gran Bretagna (tuttora in vigore). Nonostante le sue deduzioni, Malthus non traduce mai le sue leggi in termini strettamente matematici.



L'articolo fondante della *dinamica delle popolazioni* può essere considerato la breve nota “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement”, pubblicata dal matematico belga Pierre François Verhulst (1804–1849) nel 1838. Verhulst traduce in termini matematici, probabilmente per la prima volta, la legge di Malthus come l'equazione (1). Osserva

poi che la velocità di crescita della popolazione è diminuita dalla sua stessa crescita, e propone come più semplice dei modelli l'equazione (2), chiamando le sue soluzioni *curve logistiche*. Negli anni successivi, Verhulst approfondirà ulteriormente lo studio dei modelli da lui proposti, arrivando a prevedere la soglia massima raggiungibile dalla popolazione del Belgio in nove milioni e quattrocentomila individui (la popolazione attuale è di circa dieci milioni). [J. Mawhin, *The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics.*]

equilibrio in  $x = 0$ . Dalla Legge di Hooke, secondo cui la forza elastica di richiamo è proporzionale alla distanza del corpo dalla posizione di equilibrio, abbiamo, indicando con  $k > 0$  la costante elastica della molla,

$$f_{\text{molla}} = -kx$$

e quindi

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Oltre a quella legata alla presenza della molla, altre forze potrebbero agire sul corpo, ad esempio la forza d'attrito

$$f_{\text{attrito}} = -\gamma x'$$

► Basandoci sull'esempio fisico della molla, possiamo cercare di indovinare l'espressione delle soluzioni dell'equazione differenziale qui a lato, che ponendo  $\omega^2 = k/m$  diventa  $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ . Visto che il corpo compie oscillazioni periodiche è naturale provare a vedere se funzioni del tipo  $\sin t$  o  $\cos t$  non risolvano l'equazione. Ciò è vero soltanto se  $\omega = 1$ . Più in generale le funzioni  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  sono soluzioni. La quantità  $\omega$  assume quindi il significato di *frequenza (propria) di oscillazione*. Di nuovo, è necessario chiedersi se le funzioni periodiche di frequenza  $\omega$  siano le uniche soluzioni o ve ne possano essere altre.

## Prede e predatori

Vito Volterra (1860–1940) è uno dei maggiori matematici italiani. È considerato, fra l'altro, uno dei padri fondatori dell'*Analisi Funzionale*, disciplina che trasferisce l'oggetto di studio dalla singola funzione reale di variabile reale agli spazi di funzioni, e che è a tutt'oggi campo di una intensa ricerca in matematica. Fu un personaggio di spicco nella politica scientifica e culturale, tanto da essere nominato senatore del Regno da Giolitti nel 1905. Volterra aveva sempre mostrato interesse per le applicazioni della matematica alla biologia e i suoi studi sulla dinamica delle popolazioni rappresentano una pietra miliare nella nascita del programma scientifico della biologia matematica.



Lo zoologo Umberto D'Ancona, genero di Volterra, aveva compiuto degli studi statistici sulle popolazioni dei pesci dell'Adriatico, rilevando un aumento della percentuale dei pesci predatori sul totale del pescato negli anni immediatamente successivi alla prima guerra mondiale; e aveva ipotizzato che ciò fosse dovuto all'interruzione

della pesca causata dalla guerra navale. Volterra elaborò una teoria generale della convivenza di un numero qualsiasi di specie animali in competizione fra di loro, a cui diede il nome di teoria matematica della lotta per la vita. Il modello di base - che descrive la coesistenza fra una specie di prede e una di predatori - consisteva in un sistema di due equazioni differenziali non lineari, oggi note come equazioni di Lotka-Volterra (in quanto introdotte contemporaneamente dallo statistico statunitense Alfred J. Lotka). Dall'analisi di questo modello, che studieremo nel Capitolo VIII a pagina 437, Volterra ricavò tre leggi. La prima asserisce che le densità delle due popolazioni hanno un andamento ciclico, cioè sono funzioni periodiche

del tempo. La seconda legge stabilisce che le medie della densità delle due popolazioni in un periodo  $T$  non dipendono dai valori iniziali. La terza legge dimostra che un prelievo indiscriminato delle due popolazioni (come avviene nella pesca) determina un aumento del numero delle prede e una diminuzione del numero dei predatori (si veda a questo proposito l'Esercizio 42 a pagina 455). In tal modo, veniva mostrata la validità dell'ipotesi di D'Ancona.

La terza legge di Volterra ha avuto un'applicazione spettacolare all'entomologia agraria, confermando l'ipotesi, che già era stata avanzata sulla base delle osservazioni empiriche, che il ricorso alla lotta biologica sia più efficace dell'uso degli insetticidi. Basti pensare a un ecosistema composto di due specie: insetti fitofagi ed insetti entomofagi che si nutrono dei primi. Il risultato di Volterra suggerisce che il ricorso agli insetticidi può essere controproducente. Difatti, trattandosi di un prelievo indiscriminato di entrambe le specie (una sorta di pesca), esso produrrà un incremento delle prede (ovvero degli insetti dannosi per le piante) e una diminuzione dei benefici predatori. [Vito Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Atti della R. Accademia nazionale dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, (VI) 2 (1926), p. 31-113.]

Il Regio Decreto n. 1227 del 28 agosto 1931 dispose che i professori di ruolo prestassero giuramento di fedeltà alla Patria e al Regime fascista. Il 18 novembre Vito Volterra, invitato a presentarsi dal Rettore dell'Università per il giuramento, così espresse il suo fermo rifiuto: «Sono note le mie idee politiche, per quanto esse risultino esclusivamente dalla mia condotta nell'ambito parlamentare, la quale è tuttavia insindacabile in forza all'Art. 51 dello Statuto fondamentale del Regno. La S. V. Ill.ma comprenderà quindi come io non possa in coscienza aderire all'invito da Lei rivoltomi [...] relativa al giuramento dei professori». Conseguentemente, il 29 dicembre Vito Volterra fu licenziato.

( $\gamma > 0$  è il coefficiente di attrito dinamico) oppure una generica forza esterna  $f_{\text{esterna}} = f(t)$ . La forza risultante è data dalla somma di tutti questi contributi, perciò  $x(t)$  soddisfa la relazione

$$(3) \quad mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t) + f(t).$$

In questa situazione non possiamo, almeno a prima vista, procedere con delle semplici integrazioni che ci permettano di calcolare la posizione

$x(t)$ . Vedremo nel seguito del capitolo come trattare questo genere di equazioni.

## Equazioni differenziali

Una relazione che coinvolge una funzione incognita ed alcune delle sue derivate è detta *equazione differenziale*. La più semplice delle equazioni differenziali è

$$y'(t) = f(t)$$

dove  $f$  è una funzione nota. Sappiamo già che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'integrale indefinito

$$y(t) = \int f(t) dt = F(t) + C, \quad F' = f.$$

L'ordine dell'equazione è quello della derivata di ordine maggiore che vi compare. Per esempio l'equazione (1) è di primo ordine, la (3) di secondo. In entrambe queste equazioni la *variabile indipendente* è  $t$  e rappresenta il tempo. Una *soluzione* dell'equazione differenziale è una funzione che verifica l'equazione. Nella gran parte dei contesti è naturale richiedere che la soluzione sia *continua* su un *intervallo* di definizione. Ad esempio le restrizioni della funzione  $y(x) = -1/x$  sugli intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$  sono due diverse soluzioni dell'equazione

$$y'(x) = y^2(x).$$

Questa richiesta permette di evitare il problema di definire la soluzione successivamente all'occorrenza di fenomeni "catastrofici", quali le discontinuità, che pure sono di interesse interpretativo dal punto di vista delle applicazioni. Ci aspettiamo dagli esempi visti finora che l'*integrale generale* di un'equazione differenziale, cioè l'insieme di tutte le sue soluzioni, dipenda tipicamente da una (o più) costanti di integrazione.

## § 2. Equazioni a variabili separabili

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'(t) = ty^2(t)$$

e, in prima battuta, osserviamo che la funzione nulla  $y \equiv 0$  risolve l'equazione. Ci proponiamo quindi di cercare le soluzioni dell'equazione che non si annullano; a tal fine se supponiamo  $y(t) \neq 0$  e dividiamo per  $y^2(t)$  entrambi i membri otteniamo

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t.$$

► In particolare studieremo le soluzioni dell'equazione (3) negli Esercizi (1.7) e (1.8), svolti alla fine del capitolo.

► Se per esempio  $f$  è una funzione continua.

► Quindi in particolare una soluzione ammette almeno tante derivate quanto è l'ordine dell'equazione.

► Abbiamo già visto nel primo volume come risulti opportuno definire la primitiva di una funzione solo su un intervallo e non su un dominio generico. Dato il legame tra le equazioni differenziali ed il calcolo integrale non stupisce che la richiesta venga ripetuta anche in questo contesto.

► Per i fenomeni catastrofici, si veda ad esempio l'Esercizio 14 a pagina 30.

► Al solito, a priori non abbiamo motivo per ritenere che ci siano soluzioni che non si annullano mai.

Notiamo che il termine a sinistra dipende solo da  $y$  e dalla sua derivata, a destra invece rimane una funzione della variabile indipendente  $t$ . Integrando ora rispetto a  $t$  si ha

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int t dt,$$

da cui

$$-\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{2}t^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $-1/y$  è invertibile (laddove è definita), possiamo esplicitare la funzione incognita  $y$  e concludere che le soluzioni dell'equazione di partenza che non si annullano sono della forma

$$y(t) = -\frac{1}{t^2/2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, ci proponiamo di studiare un'equazione differenziale del tipo

$$(4) \quad y' = g(t)h(y)$$

con  $g, h$  continue. Un'equazione di questo tipo viene detta *equazione a variabili separabili*. Supponiamo dapprima che il valore  $\bar{y}$  annulli la funzione  $h$ , cioè  $h(\bar{y}) = 0$ ; allora la funzione costantemente uguale a  $\bar{y}$  è una soluzione (costante) dell'equazione (4). Per determinare le soluzioni dell'equazione che non intersecano le soluzioni costanti, supponiamo  $h(y) \neq 0$  e dividiamo entrambi i termini dell'equazione per  $h(y)$ ; otteniamo

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t).$$

Integrando rispetto alla variabile indipendente  $t$  si ha

$$\int \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int g(t) dt,$$

ovvero

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt.$$

Dette ora  $H$  e  $G$  le primitive rispettivamente di  $1/h$  e  $g$  dall'espressione precedente otteniamo

$$H(y) = G(t) + C$$

► Stiamo *separando* la variabile dipendente da quella indipendente (nel senso che non appaiono contemporaneamente nello stesso membro dell'equazione).

► Nel primo integrale abbiamo eseguito il cambiamento di variabili  $Y = y(t)$  da cui  $dY = y'(t) dt$  e

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int \frac{dY}{Y^2} = -\frac{1}{Y} + C.$$

► Si osservi che la variabile indipendente,  $t$ , e quella dipendente,  $y$ , compaiono come argomento di due funzioni diverse moltiplicate tra loro.

► Nel paragrafo precedente abbiamo incontrato una importante equazione a variabili separabili: l'equazione logistica (2). Rimandiamo la sua risoluzione all'Esercizio svolto (1.1).

► Le soluzioni costanti di un'equazione differenziale, in questo caso  $y \equiv \bar{y}$  con  $h(\bar{y}) = 0$ , sono dette *soluzioni (o integrali) singolari*.

► Integrale generale dell'equazione a variabili separabili.

con  $C$  costante arbitraria. Sarà dunque possibile esplicitare la funzione incognita  $y$  negli intervalli in cui la funzione  $H$  risulta essere invertibile. Per quanto detto la funzione ottenuta sarà una soluzione dell'equazione fin tanto che  $h(y(t)) \neq 0$ , cioè fino a che il suo grafico non interseca quello di una soluzione costante (fatto che si può escludere sotto opportune ipotesi, si veda l'Esercizio 27 a pagina 31).

**(I.1) Esempio.** Riprendiamo l'equazione  $y'(t) = ty^2(t)$ ; secondo la notazione introdotta, abbiamo  $g(t) = t$ ,  $h(y) = y^2$  entrambe continue su tutta la retta reale. Poiché  $h$  si annulla se (e solo se)  $y = 0$ , l'equazione ammette come (unica) soluzione costante la retta  $y = 0$ . Abbiamo già visto che le soluzioni che non si annullano sono  $y(t) = -1/(t^2/2 + C)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che l'espressione precedente ha senso quando  $t^2/2 + C \neq 0$ . Quindi, poiché le soluzioni devono essere definite su intervalli, ogni soluzione (che non si annulla) sarà definita su tutto  $\mathbb{R}$  quando  $C > 0$ , su  $(-\infty, -\sqrt{-2C})$ , su  $(-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C})$  oppure su  $(\sqrt{-2C}, +\infty)$  quando  $C < 0$ , su  $(-\infty, 0)$  oppure su  $(0, +\infty)$  quando  $C = 0$ . La scelta dell'intervallo di definizione dipende da un'eventuale richiesta di passaggio per un punto del piano. Se ad esempio vogliamo che  $y(0) = y_0$  ( $y_0 \neq 0$ ) otteniamo

$$y(0) = -\frac{1}{C} \quad \text{e quindi} \quad C = -\frac{1}{y_0}.$$

La soluzione corrispondente è definita se  $t^2 \neq \frac{2}{y_0}$ ; possiamo quindi concludere che se  $y_0 < 0$  la soluzione trovata è definita su tutto  $\mathbb{R}$  mentre se  $y_0 > 0$  lo è soltanto sull'intervallo  $(-\sqrt{2/y_0}, \sqrt{2/y_0})$ .

**(I.2) Esempio.** L'equazione

$$y'(t) = \frac{t}{3 + \cos y(t)}$$

è a variabili separabili con  $g(t) = t$  e  $h(y) = 1/(3 + \cos y)$ . Sia  $g$  che  $h$  sono continue su tutta la retta reale; inoltre  $h$  è strettamente positiva poiché, per ogni  $y$ , si ha  $\cos y \geq -1$ , quindi non esistono soluzioni costanti. Se dividiamo per  $h(y)$  e calcoliamo la primitiva di entrambi i termini troviamo

$$\int (3 + \cos y(t))y'(t) dt = \int t dt$$

ovvero  $H(y) = 3y + \sin y = t^2/2 + C$ . La funzione  $H$  è strettamente monotona su tutto  $\mathbb{R}$  e quindi invertibile, ma non riusciamo a determinare una forma esplicita della sua inversa. Le soluzioni dell'equazione differenziale risultano quindi *definite implicitamente*.

**(I.3) Esempio.** L'equazione a variabili separabili

$$y'(t) = t^2y(t)$$

► Come vedremo nei prossimi esempi, la costante  $C$  può essere calcolata associando all'equazione differenziale un dato iniziale.

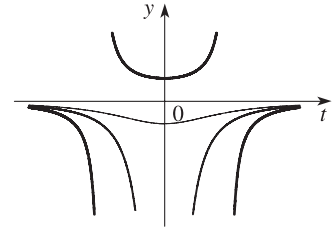


FIGURA I.2: alcune soluzioni dell'equazione  $y' = ty^2$ . Attenzione: per ogni valore di  $C < 0$  abbiamo tre diverse soluzioni!

► Imponendo la condizione iniziale possiamo determinare la costante di integrazione  $C$ , e quindi selezionare una delle soluzioni calcolate.

■ ► Questo è l'intervallo più esteso, su cui la soluzione trovata è definita, a cui appartiene l'istante iniziale  $t_0 = 0$ .

► Stiamo quindi moltiplicando per  $3 + \cos y(t)$ .

► Infatti  $H'(y) = 3 + \cos y > 0$ .

ammette come unica soluzione costante  $y \equiv 0$ . Inoltre supponendo  $h(y) = y \neq 0$  si ricava

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int t^2 dt \quad \text{e quindi} \quad \ln |y| = \frac{t^3}{3} + C.$$

La funzione logaritmo è invertibile e la sua inversa è la funzione esponenziale; otteniamo perciò

$$|y(t)| = Ke^{t^3/3}, \quad \text{con } K = e^C > 0.$$

Possiamo quindi concludere che le soluzioni non nulle sono definite su tutto l'asse reale e sono sempre positive,  $y(t) = Ke^{t^3/3}$ , o sempre negative,  $y(t) = -Ke^{t^3/3}$ . Osserviamo inoltre che le soluzioni positive sono crescenti, quelle negative decrescenti e che se  $y(t)$  è una soluzione positiva,  $-y(t)$  è una soluzione negativa. Alcune soluzioni dell'equazione sono rappresentate in Figura I.3.

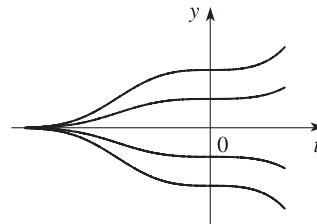


FIGURA I.3: alcune soluzioni dell'equazione  $y' = t^2 y$ .

► Questo fatto non deve stupirci, infatti dall'equazione differenziale di partenza abbiamo che  $y'$  ha lo stesso segno di  $y$ , poiché  $t^2$  è una quantità positiva.

### § 3. Equazioni lineari del primo ordine

Iniziamo a considerare l'equazione differenziale

$$ty'(t) + y(t) = t.$$

Per trovare le sue soluzioni possiamo semplicemente osservare che il termine a sinistra è la derivata di un prodotto. Infatti se poniamo  $f(t) = t$  abbiamo

$$\underbrace{ty'(t)}_{fy'} + \underbrace{y(t)}_{f'y} = [ty(t)]'$$

e l'equazione di partenza diventa

$$[ty(t)]' = t.$$

Ricaviamo quindi (per  $t \neq 0$ )

$$ty(t) = \frac{t^2}{2} + C \quad \implies \quad y(t) = \frac{t}{2} + \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se invece consideriamo l'equazione

$$y'(t) + y(t) = t,$$

apparentemente non possiamo procedere come prima, infatti il primo membro non è più la derivata di un prodotto: mancano dei coefficienti moltiplicativi ai termini  $y'$  ed  $y$ , che giochino il ruolo rispettivamente

di  $f$  ed  $f'$ . Possiamo tuttavia aggirare facilmente questo problema moltiplicando per  $f(t) = e^t$  entrambi i membri dell'equazione: otteniamo infatti

$$\underbrace{e^t y'(t)}_{f y'} + \underbrace{e^t y(t)}_{f' y} = [e^t y(t)]' = e^t t$$

da cui

$$e^t y(t) = \int e^t t dt = e^t(t-1) + C \quad \implies \quad y(t) = (t-1) + Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Modifichiamo ora leggermente l'equazione e studiamo

$$y'(t) + 3y(t) = t.$$

Nemmeno ora a sinistra abbiamo la derivata di un prodotto, e questa volta dobbiamo moltiplicare per una funzione  $f$  tale che  $3f(t) = f'(t)$ . Scegliamo quindi  $f(t) = e^{3t}$  e otteniamo

$$e^{3t} y'(t) + 3e^{3t} y(t) = [e^{3t} y(t)]' = e^{3t} t,$$

da cui

$$e^{3t} y(t) = \int e^{3t} t dt = \frac{1}{3} e^{3t} (t-1) + C$$

ovvero

$$y(t) = \frac{1}{3} (t-1) + Ce^{-3t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Affrontiamo ora il caso più generale, ovvero studiamo l'equazione differenziale

$$(5) \quad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

con  $a$  e  $b$  continue su un comune intervallo di definizione. Procedendo come negli esempi precedenti, cerchiamo un *fattore integrante*  $f$  (non nullo) tale che

$$f'(t) = -a(t)f(t)$$

Se  $A(t)$  è una primitiva di  $a(t)$ , ovvero  $A'(t) = a(t)$ , dall'equazione precedente (a variabili separabili nell'incognita  $f$ ) troviamo  $f(t) = e^{-A(t)}$ ; moltiplichiamo quindi entrambi i membri di (5) per  $f(t)$  e otteniamo

$$\underbrace{e^{-A(t)} y'(t)}_{f y'} + \underbrace{e^{-A(t)} (-a(t)) y(t)}_{f' y} = [e^{-A(t)} y(t)]' = e^{-A(t)} b(t)$$

che, ricordando che  $A(t) = \int a(t) dt$ , è equivalente alla formula

► Scegliendo  $f(t) = e^t$  otteniamo  $f'(t) = f(t)$ .  $f$  viene detto *fattore integrante*, nel senso che se moltiplichiamo l'equazione per  $f$  allora il suo primo membro diventa integrabile esplicitamente.

► Integrando per parti si ha infatti

$$\int e^t t dt = e^t t - \int e^t dt.$$

► Si osservi che stiamo sempre moltiplicando per delle funzioni che non si annullano.

► Tale equazione viene detta *lineare* perché, grossolanamente parlando, i suoi membri sono polinomi di primo grado rispetto alla funzione incognita e alla sua derivata (ma non necessariamente rispetto a  $t$ ). Chiariremo il concetto di linearità nel Capitolo IV, ad esso dedicato.

► Moltiplichiamo il primo membro dell'equazione per  $f$  tale che

$$f y' - f a y = [f y]' = f y' + f' y \quad \text{ovvero} \quad -f a = f'.$$

$$(6) \quad y(t) = e^{\int a(t) dt} \left( \int b(t) e^{-\int a(t) dt} dt + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**(I.4) Esempio.** Consideriamo l'equazione

$$y'(t) = -y(t) + \frac{1}{e^t}.$$

Confrontandola con la (5) abbiamo  $a(t) = -1$  e  $b(t) = 1/e^t$ . Dalla formula appena vista, dato che le funzioni  $a$  e  $b$  sono definite e continue su  $\mathbb{R}$ , ci aspettiamo che lo siano anche le soluzioni. Come primitiva di  $a$  scegliamo  $A(t) = -t$ ; si ha quindi

$$e^{A(t)} = e^{-t}, \quad e^{-A(t)} = e^t$$

ed infine dalla formula (6) otteniamo

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{A(t)} \left( \int b(t) e^{-A(t)} dt + C \right) = e^{-t} \left( \int \frac{1}{e^t} e^t dt + C \right) \\ &= \frac{t + C}{e^t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il grafico di alcune delle soluzioni è rappresentato in Figura I.4.

**(I.5) Esempio.** Troviamo ora le soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t \cos t.$$

In questo caso abbiamo  $a(t) = 1/t$  e  $b(t) = t \cos t$ . Il loro insieme comune di definizione e continuità è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; le soluzioni dell'equazione saranno quindi definite su  $(-\infty, 0)$  oppure su  $(0, +\infty)$ . Utilizziamo la formula risolutiva (6) per calcolarle. Se cerchiamo le soluzioni su  $(0, +\infty)$  otteniamo che una primitiva della funzione  $a(t)$  è  $A(t) = \int 1/t dt = \ln t$ , inoltre

$$e^{-A(t)} = e^{\ln(1/t)} = 1/t \quad \text{e} \quad \int b(t) e^{-A(t)} dt = \int \cos t dt = \sin t + C.$$

Quindi

$$y(t) = e^{A(t)} \left( \int b(t) e^{-A(t)} dt + C \right) = t(\sin t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sull'intervallo  $(-\infty, 0)$  le soluzioni hanno esattamente la stessa espressione, infatti  $A(t) = \ln(-t)$ ,  $e^{-A(t)} = e^{\ln(-1/t)} = -1/t$ ,  $e^{A(t)} = e^{\ln(-t)} = -t$ , quindi  $y(t) = -t(-\sin t + C) = t(\sin t - C)$ , con  $C$  costante arbitraria. In Figura I.5 sono rappresentati i grafici di alcune soluzioni.

Notiamo che, benché  $a(t)$  non sia definita per  $t = 0$ , potremmo pensare di estendere con continuità le soluzioni trovate anche in  $t = 0$ , tutte con valore 0. Ovviamente, nel compiere questa operazione, sarebbe necessario precisare che senso dare all'equazione differenziale per  $t = 0$ .

► Integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine. È ovviamente lasciata al Lettore la scelta se utilizzare i propri preziosi neuroni per mandare a memoria questa formula o piuttosto il procedimento che permette di ricavarla.

► Nell'integrazione di  $a$  scegliamo come costante arbitraria quella nulla: stiamo cercando *un* fattore integrante, non *tutti* i fattori integranti.

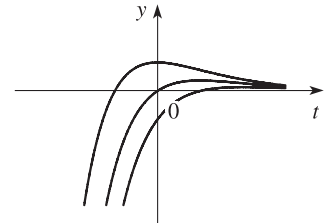


FIGURA I.4: alcune soluzioni dell'equazione  $y' = -y + 1/e^t$ .

► Sottolineiamo di nuovo che questa coincidenza tra gli intervalli di continuità dei termini dell'equazione e quelli di definizione delle soluzioni è vera per le equazioni lineari, in quanto giustificata dalla formula (6), ma è falsa per equazioni generali (si veda l'Esempio (I.1) a pagina 9).

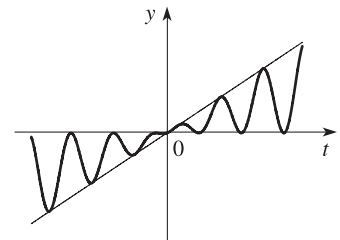


FIGURA I.5: in figura è rappresentata la funzione  $y(t) = t(\sin t + 1)$  soluzione dell'equazione differenziale separatamente sugli intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ .

## § 4. Equazioni lineari del secondo ordine

In questo paragrafo prendiamo in considerazione le equazioni del secondo ordine del tipo

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t),$$

dove  $x(t)$  è la funzione incognita,  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono delle *costanti* ed  $f$  è data. L'esempio modello è quello del moto rettilineo di un corpo descritto dall'equazione (3) a pagina 6. Ci limiteremo a descrivere un metodo per determinare una classe di soluzioni, dimostreremo nel Capitolo VIII che quelle trovate sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione lineare di secondo ordine a coefficienti costanti. Il metodo si divide in due parti, quella riguardante le cosiddette equazioni *omogenee* (cioè in cui  $f(t) \equiv 0$ ) e quella dedicata alle equazioni *non omogenee* (in cui  $f(t) \neq 0$ ).

► Tali equazioni vengono dette *equazioni lineari a coefficienti costanti*.

### Caso omogeneo

**(I.6) Esempio.** Consideriamo l'equazione differenziale

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0.$$

Il fatto che la somma della funzione incognita con alcune sue derivate (moltiplicate per dei coefficienti) debba essere nulla suggerisce di cercare delle soluzioni che siano proporzionali alle loro derivate. Per questo motivo ci domandiamo se

$$x_\lambda(t) = e^{\lambda t}$$

risolva l'equazione di partenza per qualche valore di  $\lambda$ . Le derivate prima e seconda di  $x_\lambda$  sono

$$x'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad x''_\lambda(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo che  $x_\lambda$  è soluzione se e solo se

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0,$$

ovvero (dividendo per la quantità strettamente positiva  $e^{\lambda t}$ ) se e solo se

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Ricaviamo quindi i valori  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ , che forniscono le due soluzioni

$$x_1(t) = e^t \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{2t}$$

dell'equazione differenziale di partenza. Osserviamo inoltre che tutte le funzioni

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

► Un'altra motivazione per cercare soluzioni di questo tipo viene dalle equazioni lineari di primo ordine a coefficienti costanti, infatti le soluzioni di

$$x'(t) + ax(t) = 0$$

sono tutte e sole le funzioni  $x(t) = ke^{-at}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

► Il polinomio  $\lambda^2 - 3\lambda + 2$  viene chiamato *polinomio caratteristico* associato all'equazione.

sono soluzioni dell'equazione. Abbiamo così trovato una famiglia di infinite soluzioni, al variare di *due* costanti arbitrarie. Come vedremo nel Capitolo VIII, queste sono *tutte* le soluzioni dell'equazione data, e non è un caso che le costanti arbitrarie siano in numero pari all'ordine dell'equazione. ■

Nell'esempio precedente abbiamo ricondotto la ricerca di soluzioni dell'equazione di partenza a quella delle radici del *polinomio caratteristico*. Il caso preso in considerazione era abbastanza favorevole, in quanto tale polinomio ammette due radici reali e distinte. Con qualche accorgimento si vede che il metodo è efficace anche quando le radici sono reali ma coincidenti, oppure addirittura complesse coniugate.

**(I.7) Esempio.** Il polinomio caratteristico associato all'equazione lineare omogenea

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

è  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  ed ammette due radici coincidenti  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . La funzione esponenziale

$$x_1(t) = e^{2t}$$

è quindi una soluzione dell'equazione, e assieme ad essa tutte le funzioni del tipo  $Ce^{2t}$  con  $C \in \mathbb{R}$ . Seguendo l'idea intuitiva che la presenza di due derivazioni nell'equazione provochi soluzioni che dipendono da due costanti arbitrarie, ci proponiamo di trovare una seconda soluzione che non sia della forma precedente. L'idea è di non discostarci troppo da questa prima soluzione trovata e di tentare di determinare una funzione  $C(t)$ , non costante, tale che

$$\bar{x}(t) = C(t)e^{2t}$$

risolva l'equazione. Calcoliamo le derivate di  $\bar{x}$

$$\bar{x}'(t) = C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t},$$

$$\bar{x}''(t) = C''(t)e^{2t} + 4C'(t)e^{2t} + 4C(t)e^{2t}$$

quindi, sostituendo nell'equazione, otteniamo

$$C''(t)e^{2t} = 0 \implies C''(t) = 0.$$

Quindi una funzione  $C(t)$  che soddisfa la nostra richiesta è  $C(t) = t$  e abbiamo così dimostrato che la funzione

$$x_2(t) = te^{2t}$$

risolve l'equazione di partenza. Ancora una volta osserviamo che al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  abbiamo la seguente famiglia di soluzioni

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}. \quad \blacksquare$$

► La verifica è semplice; infatti

$$x'(t) = C_1e^t + 2C_2e^{2t},$$

$$x''(t) = C_1e^t + 4C_2e^{2t},$$

quindi

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) =$$

$$C_1e^t + 4C_2e^{2t} - 3C_1e^t - 6C_2e^{2t}$$

$$+ 2C_1e^t + 2C_2e^{2t} = 0.$$

► Cioè quando il suo discriminante è strettamente positivo.

► Rispettivamente quando il discriminante è nullo oppure strettamente negativo.

► Stiamo facendo "variare la costante arbitraria" della soluzione nota!

► Tutti i termini contenenti  $C(t)$  e  $C'(t)$  si elidono!

► In effetti *tutte* le soluzioni di quest'equazione sono  $C(t) = C_1 + C_2t$ , da cui

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{2t},$$

in perfetto accordo con la conclusione dell'esempio.

**(I.8) Esempio.** Rimane da considerare il caso in cui il polinomio caratteristico ha due radici complesse. Ad esempio l'equazione

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

ammette come polinomio caratteristico  $\lambda^2 - 2\lambda + 2$  le cui radici sono

$$\lambda_1 = 1 + i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Pertanto, ragionando come nell'Esempio (I.6), otteniamo che le funzioni (a valori complessi)

$$\tilde{x}_1(t) = e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t) \quad \text{e} \quad \tilde{x}_2(t) = e^{(1-i)t} = e^t(\cos t - i \sin t)$$

risolvono, almeno formalmente, l'equazione. Anche tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = D_1\tilde{x}_1(t) + D_2\tilde{x}_2(t), \quad D_1, D_2 \in \mathbb{C}$$

sono allo stesso modo soluzioni. Volendo però selezionare solo quelle a valori reali dobbiamo imporre che  $D_1 + D_2 \in \mathbb{R}$  e  $i(D_1 - D_2) \in \mathbb{R}$ , da cui ricaviamo che  $D_1$  e  $D_2$  sono numeri coniugati. Perciò, se  $D_1 = \alpha + i\beta$  e  $D_2 = \alpha - i\beta$ , dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= (\alpha + i\beta)[e^t(\cos t + i \sin t)] + (\alpha - i\beta)[e^t(\cos t - i \sin t)] \\ &= 2\alpha e^t \cos t - 2\beta e^t \sin t. \end{aligned}$$

Ponendo infine  $C_1 = 2\alpha$  e  $C_2 = -2\beta$  abbiamo la famiglia di soluzioni reali

$$x(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t). \quad \blacksquare$$

Possiamo ora estendere il metodo risolutivo visto negli Esempi (I.6), (I.7) e (I.8) ad una generica equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea

$$(7) \quad ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo visto che un'equazione di questo tipo ammette una famiglia di soluzioni dipendente da due parametri reali e dalle radici del polinomio caratteristico

$$P_2(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Se  $\Delta = b^2 - 4ac$ , riassumiamo le situazioni che si possono presentare nella seguente tabella:

	radici di $P_2(\lambda)$	famiglia di soluzioni al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x(t) = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]$

► Ricordiamo la definizione di esponenziale di un numero complesso data dalla Formula di Eulero

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

con  $x, y \in \mathbb{R}$ . A tal proposito si veda anche l'approfondimento a pagina 51.

► Infatti

$$\begin{aligned} D_1\tilde{x}_1(t) + D_2\tilde{x}_2(t) &= \\ e^t[(D_1 + D_2)\cos t + i(D_1 - D_2)\sin t]. \end{aligned}$$

► Supponiamo  $a \neq 0$ . Se  $a = 0$  l'equazione è in realtà una lineare del primo ordine, che abbiamo imparato a risolvere nel paragrafo precedente.

A questo punto ci si può chiedere: esistono soluzioni diverse da quelle trovate? La risposta è negativa, ma al momento non abbiamo modo di giustificarla. Per ora ci limitiamo ad affermare che *tutte* le soluzioni di un'equazione lineare di secondo ordine omogenea a coefficienti costanti sono quelle della tabella precedente; vedremo una giustificazione rigorosa di questo fatto nel Capitolo VIII.

### Caso non omogeneo

Se  $f$  è una funzione continua, ci chiediamo quando, ed eventualmente in che modo, possiamo determinare le soluzioni dell'equazione *non omogenea* (o *completa*)

$$(8) \quad ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Come prima cosa osserviamo che se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono due soluzioni di (8) allora la loro differenza risolve l'equazione omogenea associata (7).

A questo punto se supponiamo di conoscere una soluzione particolare dell'equazione completa,  $x_p$ , abbiamo il seguente risultato (Esercizio [34](#)):

$$x \text{ è soluzione di (8)} \iff x = x_o + x_p, \text{ con } x_o \text{ soluzione di (7).}$$

Di conseguenza, note tutte le soluzioni dell'equazione (7), per determinare *tutte* quelle dell'equazione (8) è sufficiente trovarne *una* particolare e sommarla all'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Concludiamo questo paragrafo descrivendo in che modo, per alcune  $f$  particolari, è possibile trovare la soluzione  $x_p$  per "similitudine" con la funzione  $f$ . Per un metodo più generale rimandiamo all'Esercizio [42](#) e al Capitolo VIII.

**(I.9) Esempio.** Consideriamo l'equazione differenziale

$$x''(t) - x(t) = e^{2t}.$$

L'equazione omogenea associata  $x''(t) - x(t) = 0$  ha polinomio caratteristico  $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$ , perciò ammette la famiglia di soluzioni  $C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ , con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Per una soluzione dell'equazione non omogenea, la differenza fra la sua derivata seconda e la funzione stessa deve essere uguale  $e^{2t}$ ; è quindi sensato cercare una soluzione del tipo

$$x_p(t) = C e^{2t}.$$

Derivando otteniamo  $x'_p(t) = 2C e^{2t}$  e  $x''_p(t) = 4C e^{2t}$ ; sostituendo nell'equazione abbiamo

$$e^{2t} = x''_p(t) - x_p(t) = 4C e^{2t} - C e^{2t} = 3C e^{2t}$$

►  $f(t)$  viene spesso detto *termine noto* dell'equazione.

► La dimostrazione di questo fatto è lasciata al Lettore, si veda l'Esercizio [33](#) al fondo del capitolo.

► Questa proprietà è un caso particolare del *Principio di sovrapposizione* (si veda l'Esercizio [37](#)).

► La funzione  $e^{2t}$ , come già osservato, ha la proprietà di rimanere proporzionale a se stessa quando la si deriva un numero qualsiasi di volte.

da cui si ricava  $C = 1/3$ . Abbiamo quindi trovato che  $x_p(t) = 1/3 e^{2t}$  è una soluzione dell'equazione di partenza. Possiamo dunque concludere che tutte le soluzioni dell'equazione sono

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

**(I.10) Esempio.** Se modifichiamo il termine noto dell'equazione dell'esempio precedente e consideriamo

$$x''(t) - x(t) = e^t,$$

ci accorgiamo che, in questo caso, è del tutto inutile cercare di determinare una soluzione particolare nella famiglia di funzioni  $Ce^t$ . Proviamo invece a determinarne una nella forma

$$x_p(t) = Cte^t.$$

Otteniamo  $x'_p(t) = C(e^t + te^t)$  e  $x''_p(t) = C(2e^t + te^t)$  da cui

$$x''_p(t) - x_p(t) = C(2e^t + te^t) - Cte^t = 2Ce^t.$$

Se imponiamo che  $x_p$  soddisfi l'equazione otteniamo  $2Ce^t = e^t$ , quindi  $C = 1/2$ . Concludiamo che le soluzioni dell'equazione sono

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} te^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

**(I.11) Esempio.** Prendiamo ora in considerazione l'equazione dell'Esempio (I.7), il cui polinomio caratteristico ammette due radici reali coincidenti uguali a 2. Se ora aggiungiamo come termine noto proprio la funzione  $e^{2t}$  otteniamo l'equazione completa

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = e^{2t};$$

questa volta non è nemmeno più sufficiente cercare  $x_p$  del tipo  $Cte^{2t}$ , infatti questa sarebbe già una soluzione dell'equazione omogenea. In questo caso proviamo a determinare una soluzione nella famiglia

$$x_p(t) = Ct^2 e^{2t}.$$

Derivando otteniamo

$$x'_p(t) = C(2te^{2t} + 2t^2 e^{2t}) \quad \text{e} \quad x''_p(t) = C(2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2 e^{2t})$$

e quindi sostituendo nell'equazione di partenza

$$C(2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2 e^{2t}) - 4C(2te^{2t} + 2t^2 e^{2t}) + 4Ct^2 e^{2t} = e^{2t}$$

ovvero  $2C + 8Ct + 4Ct^2 - 8Ct - 8Ct^2 + 4Ct^2 = 1$  da cui ricaviamo  $C = 1/2$ . Concludiamo quindi che le soluzioni dell'equazione completa studiata sono

$$x(t) = \left( C_1 + C_2 t + \frac{1}{2} t^2 \right) e^{2t}. \quad \blacksquare$$

► Infatti le funzioni di questa famiglia sono già soluzioni dell'equazione omogenea associata al problema, perciò sostituite a primo membro fanno sempre 0! Ispirandoci a quanto fatto nell'Esempio (I.7), possiamo utilizzare il metodo della variazione della costante arbitraria e cercare una soluzione della forma

$$\bar{x}_p(t) = C(t)e^t.$$

Otteniamo l'equazione

$$C'' + 2C' = 1,$$

da cui ricaviamo che  $C(t) = t/2$  è una soluzione.

Dai tre esempi visti deduciamo che per determinare una soluzione particolare di un'equazione completa con termine noto del tipo  $e^{\lambda t}$  è fondamentale sapere se  $\lambda$  è uno zero del polinomio caratteristico,  $P_2$ , e quale è la sua molteplicità. Con ragionamenti del tutto analoghi si riescono anche a determinare soluzioni particolari di equazioni con termine noto contenente funzioni seno e/o coseno, moltiplicate eventualmente per funzioni esponenziali. In questi casi possiamo determinare una soluzione particolare secondo la seguente tabella.

$f(t)$	$x_p(t)$	
$Q_k(t)$	$\tilde{Q}_k(t)$	se $P_2(0) \neq 0$
	$t\tilde{Q}_k(t)$	se 0 è radice di $P_2$ di molt. 1
	$t^2\tilde{Q}_k(t)$	se 0 è radice di $P_2$ di molt. 2
$ae^{\lambda t}$	$Ae^{\lambda t}$	se $P_2(\lambda) \neq 0$
	$Ate^{\lambda t}$	se $\lambda$ è radice di $P_2$ di molt. 1
	$At^2e^{\lambda t}$	se $\lambda$ è radice di $P_2$ di molt. 2
$ae^{\alpha t} \cos(\beta t)$ (o $\sin(\beta t)$ )	$e^{\alpha t}[A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)]$	se $P_2(\alpha \pm i\beta) \neq 0$
	$te^{\alpha t}[A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)]$	se $\alpha \pm i\beta$ sono radici di $P_2$ .

►  $Q_k(t)$  e  $\tilde{Q}_k(t)$  sono polinomi di grado  $k$ .

► Osserviamo che quando 0 è radice doppia del polinomio caratteristico l'equazione differenziale può essere risolta integrando due volte!

È inoltre possibile estendere questi ragionamenti al caso in cui le funzioni esponenziali, seno, coseno sono moltiplicate per dei polinomi, come si può vedere nell'Esercizio (I.9) svolto a pagina 27.

## Esercizi

(I.1) È data l'equazione logistica

$$p'(t) = kp(t) - hp^2(t),$$

con la condizione iniziale  $p(0) = p_0$ . Determinare  $p(t)$  (per  $t > 0$ ), supponendo che  $k$  e  $h$  siano due costanti positive.

*Soluzione.* Dobbiamo risolvere l'equazione a variabili separabili

$$p'(t) = p(t)(k - hp(t)).$$

Si osserva immediatamente la presenza di due soluzioni costanti

$$p \equiv 0 \quad \text{e} \quad p \equiv \frac{k}{h}.$$

Supponendo quindi  $p(t) \neq 0$  e  $p(t) \neq k/h$  dividiamo entrambi i termini dell'equazione per  $p(t)(k - hp(t))$  ed integriamo rispetto alla variabile

indipendente  $t$

$$\int \frac{dp}{p(k-hp)} = t + C.$$

Otteniamo quindi

$$\ln \left| \frac{p}{k-hp} \right| = k(t + C) \quad \Longrightarrow \quad \frac{p(t)}{k-hp(t)} = De^{kt}, \quad D \neq 0,$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{p(t)}{k-hp(t)} = De^{kt} &\iff 1 - \frac{k}{k-hp(t)} = -hDe^{kt} \\ &\iff \frac{h}{k}p(t) = 1 - \frac{1}{1+hDe^{kt}} \end{aligned}$$

e concludiamo

$$(9) \quad p(t) = \frac{kDe^{kt}}{1+hDe^{kt}}.$$

Imponendo la condizione iniziale  $p(0) = p_0$  possiamo quindi ricavare la costante di integrazione  $D$

$$D = \frac{p_0}{k-hp_0}.$$

Osserviamo che la soluzione trovata è definita quando il suo denominatore è non nullo ovvero  $1+hDe^{kt} \neq 0$ ; sostituendo il valore della costante di integrazione  $D$  otteniamo la condizione  $e^{kt} \neq 1 - k/(hp_0)$  che è sempre verificata quando  $t > 0$  essendo  $1 - k/(hp_0) < 1$ . Quindi la soluzione trovata è definita su  $[0, +\infty)$  e si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kDe^{kt}}{1+hDe^{kt}} = \frac{k}{h}.$$

Possiamo quindi concludere che quando lasciamo evolvere una popolazione con  $p_0$  individui all'istante iniziale secondo la legge logistica (con  $h, k$  costanti strettamente positive) essa tenderà a stabilizzarsi verso un numero di circa  $k/h$  individui, che rappresenta la capacità dell'ambiente. Dall'espressione di  $p'$ ,  $p'(t) = p(t)(k-hp(t))$ , potevamo già dedurre che le soluzioni dell'equazione sarebbero state delle funzioni (strettamente) crescenti quando  $p(t) \in (0, k/h)$ , decrescenti se  $p(t) > k/h$ . i grafici di alcune soluzioni sono rappresentati in Figura I.1 (a destra), pagina 4.

**(I.2)** Un serbatoio con una capacità di 1000 lt viene riempito di acqua in cui vengono sciolti 5 kg di sale. Una soluzione di acqua e sale al 2% entra nel serbatoio con una velocità di 10 lt/min. La soluzione viene continuamente rimescolata ed esce dal serbatoio alla stessa velocità. Quanto sale contiene il serbatoio dopo 5 minuti?

► Una primitiva del termine a sinistra è

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p(k-hp)} &= \frac{1}{k} \int \left[ \frac{1}{p} + \frac{h}{k-hp} \right] dp \\ &= \frac{1}{k} (\ln |p| - \ln |k-hp|) \\ &= \frac{1}{k} \ln \frac{|p|}{|k-hp|}. \end{aligned}$$

► Ricordiamo che siamo supponendo  $p(t) \neq k/h$ , quindi in particolare  $p_0 \neq k/h$ .

► Per uno studio completo della famiglia di soluzioni trovata, rimandiamo all'Esercizio 6 a pagina 29.

*Soluzione.* La variazione della quantità di sale presente nel serbatoio è uguale alla differenza tra la sua velocità di entrata,  $v_e$ , e quella di uscita,  $v_u$ . Detta  $s(t)$  la quantità di sale al tempo  $t$ , misurata in kg, l'equazione che descrive il fenomeno è

$$s'(t) = v_e(t) - v_u(t).$$

Osserviamo che la quantità di sale per ogni litro di soluzione al tempo  $t$  è  $s(t)/1000$ . Le velocità di entrata e di uscita sono rispettivamente

$$v_e(t) = \frac{1}{5} [\text{kg/min}] \quad \text{e} \quad v_u(t) = \frac{s(t)}{100} [\text{kg/min}].$$

Infatti, la soluzione entrante contiene il 2% di sale, quindi ogni minuto entrano 0,2 kg di sale, disciolto in 10 lt di acqua; inoltre, essendo  $s(t)/1000$  la quantità di sale per ogni litro di soluzione al tempo  $t$  il sale uscente ogni minuto è pari a 10 volte questa quantità. Otteniamo

$$s'(t) = \frac{1}{100}(20 - s(t)).$$

L'equazione differenziale trovata è sia lineare di primo ordine sia a variabili separabili; la risolviamo nel secondo modo, dopo aver osservato che la soluzione da determinare deve verificare la condizione iniziale  $s(0) = 5$ . La soluzione costante  $s(t) \equiv 20$  non è dunque quella cercata. Supponiamo quindi  $s(t) \neq 20$ , dividiamo per  $20 - s(t)$  e, dopo aver calcolato la primitiva di entrambi i termini abbiamo

$$\ln |20 - s(t)| = -\frac{1}{100}t + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 20 - s(t) = Ke^{-t/100}, \quad K > 0.$$

Ricordando che  $s(0) = 5$  otteniamo  $K = 15$  e quindi

$$s(t) = 20 - 15e^{-t/100};$$

in particolare dopo 5 minuti nel serbatoio sono presenti  $20 - 15e^{-1/20} \simeq 5,7$  kg di sale.

**(I.3) (Equazione omogenea)** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} - e^{y(t)/t}.$$

*Soluzione.* Osserviamo che l'equazione è priva di significato quando  $t = 0$ , le sue soluzioni non saranno dunque definite in  $t = 0$ . Effettuiamo ora la sostituzione

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}$$

► Essendo  $s(0) < 20$  e avendo supposto  $s(t) \neq 20$ , abbiamo potuto togliere il valore assoluto, infatti  $20 - s(t) > 0$  laddove  $s(t)$  è definita.

e, derivando la funzione  $z$  rispetto alla variabile indipendente  $t$ , otteniamo

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{z(t) - e^{z(t)}}{t} - \frac{z(t)}{t} \implies z'(t) = -\frac{e^{z(t)}}{t}.$$

Abbiamo così trasformato l'equazione differenziale di partenza in un'equazione differenziale a variabili separabili, siamo quindi in grado di determinare la funzione incognita  $z(t)$  e da questa ricavare  $y(t) = tz(t)$ .

L'equazione trovata non ha soluzioni costanti. Dividendo per  $-e^{z(t)}$  e integrando otteniamo

$$-\int e^{-z} dz = \int \frac{dt}{t} \iff e^{-z(t)} = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$z(t) = -\ln(\ln |t| + C), \quad \text{definita se } |t| > e^{-C}.$$

Le soluzioni del problema di partenza quindi sono

$$y(t) = -t \ln(\ln |t| + C)$$

e sono definite su  $(-\infty, -e^{-C})$  oppure su  $(e^{-C}, +\infty)$ ; in Figura I.6 ne sono rappresentate alcune.

**(I.4)** Una tazza di caffè alla temperatura di  $75^\circ\text{C}$  viene posta in una stanza a  $25^\circ\text{C}$ . Supponendo che il raffreddamento segua la Legge di Newton, secondo la quale la velocità di raffreddamento è proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente che lo circonda, e sapendo che nei primi 5 minuti la tazza si è raffreddata di  $25^\circ\text{C}$  scrivere l'equazione differenziale che descrive il raffreddamento del caffè. Determinare dopo quanto tempo il caffè raggiunge i  $35^\circ\text{C}$ .

*Soluzione.* Se chiamiamo  $T$  la temperatura del caffè (supponiamo che la temperatura del liquido sia uniforme) la legge di Newton assicura l'esistenza di una "costante di raffreddamento"  $K < 0$  tale che

$$T'(t) = K(T(t) - 25).$$

Ancora una volta siamo di fronte ad un'equazione differenziale al tempo stesso a variabili separabili e lineare di primo ordine. Applichiamo questa volta la formula risolutiva vista a pagina 12, con  $a(t) = K$  e  $b(t) = -25K$  per determinare  $T(t)$

$$T(t) = e^{Kt} \left( \int -25Ke^{-Kt} dt + C \right) = 25 + Ce^{Kt}.$$

Per determinare la costante di integrazione  $C$  usiamo la condizione iniziale  $T(0) = 75$ , ottenendo  $75 = C + 25$ , da cui  $C = 50$ . Per determinare

► Più in generale, per risolvere un'equazione del tipo

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

si effettua la sostituzione

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}$$

per ricondursi all'equazione differenziale a variabili separabili

$$z' = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Dopo aver risolto quest'ultima si trovano le soluzioni del problema iniziale sostituendo  $y(t) = tz(t)$ .

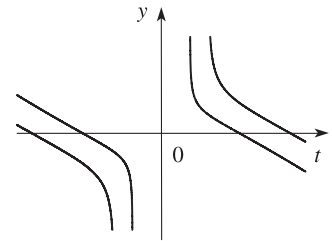


FIGURA I.6: alcune soluzioni dell'equazione omogenea  $y' = y/t - e^{y/t}$ .

la costante di raffreddamento utilizziamo la seconda informazione che viene fornita: dopo cinque minuti la temperatura del caffè è di  $50^\circ\text{C}$ . Abbiamo

$$50 = T(5) = 50e^{5K} + 25 \quad \Longleftrightarrow \quad K = -\frac{\ln 2}{5}.$$

L'equazione differenziale che descrive il raffreddamento del caffè è quindi

$$T'(t) = -\frac{\ln 2}{5}(T(t) - 25)$$

e la temperatura al tempo  $t$  è  $T(t) = 50e^{-\ln 2 t/5} + 25$ . Per determinare  $\bar{t} > 0$  tale che  $T(\bar{t}) = 35$  è dunque sufficiente sostituire

$$35 = 50e^{-\ln 2 \bar{t}/5} + 25$$

da cui si ottiene  $\bar{t} = 5 \ln 5 / \ln 2 \approx 11,6$ . Quindi il caffè raggiunge i  $35^\circ\text{C}$  dopo 11 minuti e 36 secondi (circa).

☆ (I.5) (Equazione di Bernoulli) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2(\tan t)y(t) + 2\sqrt{y(t)}$$

definita per  $t \neq \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dopo aver effettuato una opportuna sostituzione per ricondursi a una equazione lineare, determinare le soluzioni dell'equazione data.

*Soluzione.* Osserviamo che  $y \equiv 0$  è soluzione. Per  $y(t) > 0$  definiamo

$$z(t) = \sqrt{y(t)}.$$

La derivata di  $z$  è

$$z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{y(t)}}y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{y(t)}}[2(\tan t)y(t) + 2\sqrt{y(t)}] = (\tan t)\sqrt{y(t)} + 1,$$

quindi  $z$  soddisfa l'equazione lineare

$$z'(t) = (\tan t)z(t) + 1.$$

Possiamo applicare la formula risolutiva (6) per determinare  $z$ ; abbiamo  $a(t) = \tan t$ ,  $b(t) = 1$ , quindi  $A(t) = -\ln|\cos t|$  e

$$z(t) = \frac{1}{|\cos t|} \left( \int |\cos t| dt + C \right) \quad \Longrightarrow \quad z(t) = \frac{\sin t + C}{\cos t}$$

grazie all'arbitrarietà della costante di integrazione  $C \in \mathbb{R}$ .

Innanzitutto osserviamo che l'espressione di  $z$  ottenuta (come anche l'equazione) ha senso quando  $t \neq \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Però, come abbiamo

► Più in generale ci proponiamo di risolvere un'equazione del tipo

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  (se  $\alpha = 0, 1$  siamo già in grado di risolvere l'equazione). Dopo aver osservato che  $y \equiv 0$  è soluzione quando  $\alpha > 0$ , tentiamo di ricondurci ad un'equazione di cui sappiamo calcolare le soluzioni effettuando la sostituzione

$$z(t) = y^\beta(t),$$

con  $\beta \in \mathbb{R}$  opportuno. Derivando otteniamo  $z'(t) = \beta y^{\beta-1}(t)y'(t)$  e quindi

$$\begin{aligned} z'(t) &= \beta y^{\beta-1}(t)[a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t)] \\ &= \beta [a(t)z(t) + b(t)y^{\alpha+\beta-1}(t)]. \end{aligned}$$

Affinché quest'ultima equazione sia lineare (e quindi facilmente risolvibile) dev'essere  $\beta = 1 - \alpha$ . Abbiamo quindi capito che se poniamo  $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$  l'equazione di partenza si trasforma nell'equazione lineare

$$z'(t) = (1 - \alpha)[a(t)z(t) + b(t)]$$

di cui conosciamo la forma esplicita delle soluzioni.

più volte osservato, le soluzioni di un'equazione differenziale devono essere definite su degli intervalli. Otteniamo quindi molteplici famiglie di soluzioni, definite su intervalli disgiunti:

$$z(t) = \frac{\sin t + C}{\cos t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

A questo punto possiamo calcolare la funzione incognita di partenza. Poiché  $z(t) = \sqrt{y(t)}$ , la funzione  $z$  trovata non può essere negativa. Questo impone una ulteriore restrizione sull'intervallo di definizione di  $z$ , almeno per alcuni valori di  $C$ . Infatti

$$z(t) \geq 0 \iff \begin{cases} \sin t + C \geq 0 \text{ e } \cos t > 0 \\ \text{oppure} \\ \sin t + C \leq 0 \text{ e } \cos t < 0. \end{cases}$$

Sotto queste condizioni

$$y(t) = \left(\frac{\sin t + C}{\cos t}\right)^2 \quad \text{con } t \in I,$$

dove l'intervallo di definizione  $I$  dipende da  $k$  e da  $C$  ed è definito nel modo seguente:

$$\begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ se } k \text{ è pari e } C \geq 1 \text{ o } k \text{ è dispari e } C \leq -1 \\ \left(-\arcsin C + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ se } k \text{ è pari e } -1 < C < 1 \\ \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\arcsin C + k\pi\right), \text{ se } k \text{ è dispari e } -1 < C < 1. \end{cases}$$

**(I.6)** (Equazione logistica a coefficienti variabili) Usando la sostituzione  $z(t) = 1/p(t)$ , determinare la soluzione per  $k(t)$  e  $h(t)$  variabili nel tempo dell'equazione logistica

$$p'(t) = k(t)p(t) - h(t)p^2(t).$$

*Soluzione.* Come suggerito, utilizziamo la sostituzione  $z(t) = 1/p(t)$  e calcoliamo la derivata della funzione  $z$

$$z'(t) = -\frac{p'(t)}{p^2(t)} = -\frac{k(t)p(t) - h(t)p^2(t)}{p^2(t)} = -k(t)\frac{1}{p(t)} + h(t)$$

da cui ricaviamo che  $z$  è soluzione dell'equazione lineare

$$z'(t) = -k(t)z(t) + h(t).$$

Possiamo quindi applicare la formula risolutiva (6) per determinarne le soluzioni

$$z(t) = e^{-K(t)} \left( \int h(t)e^{K(t)} dt + C \right).$$

► Stiamo risolvendo un'equazione di Bernoulli con  $\alpha = 2$ ; si veda l'Esercizio (I.5).

dove  $K(t)$  è una qualsiasi primitiva di  $k$ . Per trovare  $p(t)$  sarà sufficiente considerare il reciproco dell'espressione trovata, ovvero

$$p(t) = e^{K(t)} \left( \int h(t)e^{K(t)} dt + C \right)^{-1}.$$

► Si osservi l'analogia tra la soluzione trovata e la (9).

**(I.7) (Oscillatore armonico)** Studiare le soluzioni dell'equazione

$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t).$$

al variare della costante elastica della molla  $k > 0$  e del coefficiente d'attrito  $\gamma > 0$ .

► Come abbiamo visto a pagina 3 questa è l'equazione differenziale soddisfatta dalla posizione  $x(t)$  di un corpo di massa  $m$  vincolato a muoversi su una guida rettilinea, soggetto sia ad una forza generata da una molla (con posizione di equilibrio in  $x = 0$ ) che alla forza d'attrito.

*Soluzione.* Dividendo l'equazione differenziale per  $m > 0$  otteniamo

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

dove abbiamo posto (per comodità di calcolo che capiremo a breve)

$$\delta = \frac{\gamma}{2m} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Il polinomio caratteristico associato a quest'ultima equazione è  $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2$  ed ammette come radici

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

A seconda del segno della quantità sotto radice,  $\delta^2 - \omega^2$ , deduciamo tre possibili comportamenti.

**Caso 1:**  $\delta > \omega$ . Il polinomio caratteristico ha due radici reali e distinte, quindi l'equazione ammette le seguenti soluzioni

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Osserviamo che entrambi gli zeri del polinomio caratteristico sono negativi, quindi le soluzioni trovate tendono a zero in modo esponenziale quando  $t \rightarrow +\infty$ . Fisicamente questo significa che se la costante d'attrito è grande (rispetto alla costante di elasticità della molla), allora il corpo non oscilla, ma viene trascinato verso la posizione di equilibrio. Al variare delle costanti  $C_1$  e  $C_2$  le funzioni  $x(t)$  hanno un andamento come quello delle curve in Figura I.7.

► Infatti  $\sqrt{\delta^2 - \omega^2} < \delta$ .

**Caso 2:**  $\delta = \omega$ . In questo caso il polinomio ha due radici reali coincidenti  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ , si ha quindi la famiglia di soluzioni

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Anche in questo caso le soluzioni decrescono in modo esponenziale al crescere del tempo  $t$ . Il grafico di alcune soluzioni è rappresentato in Figura I.7.

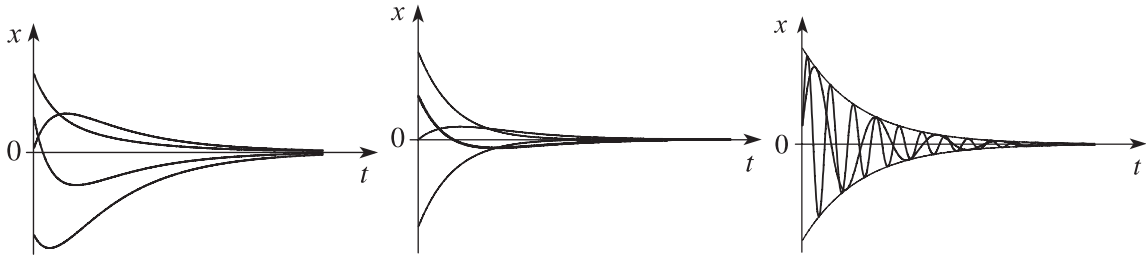


FIGURA 1.7: da sinistra a destra sono rappresentati alcuni possibili moti di un oscillatore armonico rispettivamente nei casi in cui  $\delta > \omega$ ,  $\delta = \omega$  e  $\delta < \omega$ , al variare della posizione e della velocità iniziali dell'oscillatore. L'andamento delle curve è molto simile nei primi due casi, in cui l'attrito è grande rispetto alla costante di elasticità della molla. Nel terzo caso risulta invece evidente il carattere oscillatorio del moto, compreso tra i grafici delle curve esponenziali  $\pm re^{-\delta t}$ .

**Caso 3:**  $\delta < \omega$ . Le radici del polinomio caratteristico sono due numeri complessi coniugati, ovvero

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\bar{\omega} \quad \text{con} \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}.$$

Abbiamo quindi la famiglia di soluzioni

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\bar{\omega}t) + C_2 e^{-\delta t} \cos(\bar{\omega}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per riuscire a dare una interpretazione fisica del risultato ottenuto riscriviamo quest'ultima espressione effettuando le seguenti sostituzioni

$$r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)$$

da cui otteniamo

$$x(t) = r e^{-\delta t} \cos(\bar{\omega}t + \varphi), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Da quest'ultima espressione risulta evidente il carattere oscillatorio del moto. In questo caso quindi l'attrito non è sufficiente per smorzare il moto oscillatorio causato dalla molla. L'effetto dell'attrito si può osservare nel decadimento esponenziale dell'ampiezza dell'oscillazione: il grafico di  $x(t)$  è compreso tra la coppia di curve  $\pm r e^{-\delta t}$  (si veda la Figura 1.7, a destra).

► Osserviamo che in assenza di attrito, cioè quando  $\delta = 0$  si ottiene il moto puramente oscillatorio  $x(t) = r \cos(\omega t + \varphi)$ .

**(I.8)** (*Oscillatore armonico con forzante*) Studiare il moto di un corpo di massa  $m$  vincolato a muoversi senza attrito su una guida rettilinea, soggetto ad una forza generata da una molla con costante elastica  $k > 0$  e ad una forza esterna di intensità  $f(t) = A \cos(\phi t)$  con  $A, \phi$  parametri reali.

*Soluzione.* Abbiamo visto a pagina 3 che in questo caso l'equazione soddisfatta dalla posizione  $x(t)$  del corpo è

$$m x''(t) + k x(t) = A \cos(\phi t).$$

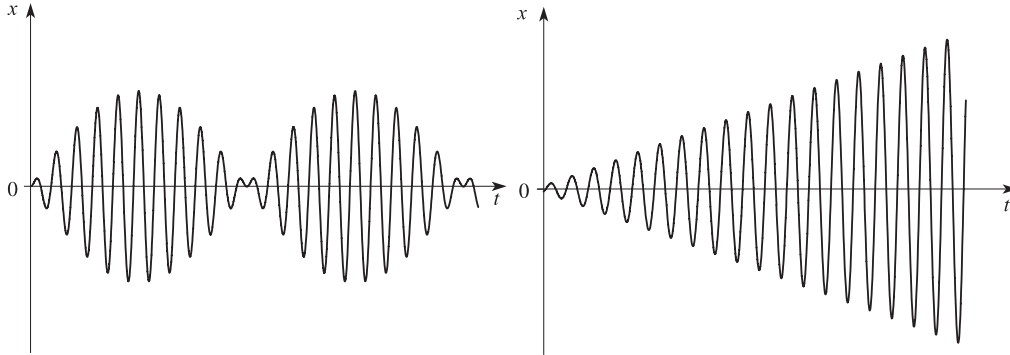


FIGURA 1.8: a sinistra un esempio di moto di un oscillatore armonico con forzante  $a \cos(\phi t)$  non in risonanza; a destra invece la forzante è in risonanza, cioè  $\phi = \omega$ .

Se dividiamo per  $m$  e poniamo  $\omega^2 = k/m$  e  $a = A/m$  otteniamo

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = a \cos(\phi t).$$

Dall'esercizio precedente deduciamo l'espressione delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, ovvero  $x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$ , al variare di  $C_1, C_2$  in  $\mathbb{R}$ . Vogliamo ora cercare una soluzione particolare dell'equazione completa. Essendo  $\pm i\omega$  le radici del polinomio caratteristico, possono presentarsi due situazioni:

**Caso 1:**  $\phi \neq \omega$ . In questo caso cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$x_p(t) = b \cos(\phi t) + c \sin(\phi t).$$

la cui derivata seconda è  $x_p''(t) = -\phi^2(b \cos(\phi t) + c \sin(\phi t))$ . Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$(\omega^2 - \phi^2)(b \cos(\phi t) + c \sin(\phi t)) = a \cos(\phi t) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\omega^2 - \phi^2}, \quad c = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione completa quindi sono

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\phi t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Se effettuiamo ancora una volta le sostituzioni  $r = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$  e  $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$  otteniamo

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\phi t).$$

Il moto del corpo risulta quindi essere la sovrapposizioni di due moti oscillatori con ampiezze e periodi diversi (Figura 1.8, a sinistra).

► È il caso  $\delta = 0$ .

► Non dobbiamo stupirci che la costante  $c$  sia nulla, infatti se  $x_p$  fosse somma di una funzione pari e di una dispari allora anche  $x_p''$  avrebbe la stessa struttura (la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa). Dunque  $x_p''(t) + \omega^2 x_p(t)$  non potrebbe essere uguale ad  $a \cos(\phi t)$ , che è pari. Potevamo quindi dedurre senza fare calcoli che  $c = 0$  e cercare direttamente una soluzione particolare del tipo  $x_p(t) = b \cos(\phi t)$ .

► Per quali valori di  $\phi$  il moto è periodico?

**Caso 2:**  $\phi = \omega$ . In questo caso la soluzione particolare dev'essere cercata della forma

$$x_p(t) = bt \cos(\omega t) + ct \sin(\omega t).$$

In realtà possiamo subito dire che  $b = 0$ , infatti  $t \cos(\omega t)$  è una funzione dispari e, come nel caso precedente,  $x_p$  non può essere la somma di una funzione dispari e una pari. Derivando  $x_p$  e sostituendo nell'equazione otteniamo

$$x_p'(t) = c(\sin(\omega t) + t\omega \cos(\omega t))$$

$$x_p''(t) = c(2\omega \cos(\omega t) - t\omega^2 \sin(\omega t))$$

$$x_p''(t) + \omega^2 x_p(t) = 2c\omega \cos(\omega t) = a \cos(\phi t) \implies c = \frac{a}{2\omega}.$$

Otteniamo le soluzioni dell'equazione completa

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{a}{2\omega} t \sin(\omega t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

ovvero, sostituendo  $r = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$  e  $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$ ,

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

Da quest'ultima espressione deduciamo che per ogni successione  $(t_n)_{n \geq 1}$  divergente a  $+\infty$  del tipo  $t_n = t_0 + 2\pi/\omega n$ , con  $t_0 \neq 0$  si ha che  $|x(t_n)| \rightarrow +\infty$  e quindi il corpo, al crescere del tempo  $t$ , compie delle oscillazioni di ampiezza sempre più grandi (si veda la Figura I.8 a destra). Questo fenomeno viene chiamato *risonanza*.

### (I.9) Determinare le soluzioni delle equazioni differenziali

$$x''(t) + x(t) = t^2 \quad \text{e} \quad x''(t) + x(t) = t \sin t.$$

*Soluzione.* Le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad entrambe le equazioni sono  $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ , con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , infatti il polinomio caratteristico è  $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$  e i suoi zeri sono  $\pm i$ . Il termine noto della prima equazione è il polinomio di secondo grado  $Q_2(t) = t^2$  e  $\lambda = 0$  non annulla il polinomio caratteristico; cerchiamo dunque una soluzione particolare del tipo

$$x_p(t) = at^2 + bt + c$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  da determinare. Se imponiamo che  $x_p$  sia soluzione dell'equazione otteniamo

$$x_p''(t) + x_p(t) = (2a) + (at^2 + bt + c) = t^2$$

► Cioè la frequenza  $\phi$  della forzante è uguale alla frequenza propria  $\omega$  dell'oscillatore.

► Invece di sfidare la sorte nel tentativo di indovinare la forma dell'integrale particolare, possiamo ragionare nel modo seguente. Prendiamo  $\phi \neq \omega$ . Dall'espressione dell'integrale generale

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\phi t),$$

selezioniamo la soluzione con  $r = -a/(\omega^2 - \phi^2)$  e  $\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\omega t) \\ &\quad + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\phi t) \\ &= a \frac{\cos(\phi t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \phi^2}. \end{aligned}$$

Se, fissato  $t$ , passiamo al limite per  $\phi \rightarrow \omega$ , utilizzando la formula di de l'Hôpital otteniamo

$$\lim_{\phi \rightarrow \omega} a \frac{\cos(\phi t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \phi^2} = \frac{at \sin(\omega t)}{2\omega}.$$

da cui ricaviamo  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = -2$ . Le soluzioni della prima equazione sono quindi le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t^2 - 2.$$

Il termine noto della seconda equazione è invece del tipo

$$f(t) = Q_k(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

con  $Q_k$  polinomio di grado  $k = 1$ ,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ . Poiché  $\alpha \pm i\beta = \pm i$  sono radici del polinomio caratteristico cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$x_p(t) = Q_1(t)t \sin t + R_1(t)t \cos t$$

dove  $Q_1(t) = at + b$  ed  $R_1(t) = ct + d$  sono polinomi di primo grado da determinare. Se calcoliamo le derivate di  $x_p(t)$  ed imponiamo che risolva l'equazione troviamo

$$\begin{aligned} x_p(t) &= (at^2 + bt) \sin t + (ct^2 + dt) \cos t \\ x_p'(t) &= (2at + b) \sin t + (at^2 + bt) \cos t + (2ct + d) \cos t - (ct^2 + dt) \sin t \\ &= (-ct^2 - dt + 2at + b) \sin t + (at^2 + bt + 2ct + d) \cos t \\ x_p''(t) &= (-2ct - d + 2a) \sin t + (-ct^2 - dt + 2at + b) \cos t \\ &\quad + (2at + b + 2c) \cos t - (at^2 + bt + 2ct + d) \sin t \\ &= (-at^2 - bt - 4ct - 2d + 2a) \sin t + (-ct^2 - dt + 4at + 2b + 2c) \cos t \\ x_p''(t) + x_p(t) &= (-4ct - 2d + 2a) \sin t + (4at + 2b + 2c) \cos t = t \sin t. \end{aligned}$$

e quindi

$$-4c = 1, \quad -2d + 2a = 0, \quad 4a = 0, \quad 2b + 2c = 0$$

da cui ricaviamo  $a = d = 0$  e  $b = -c = 1/4$ . Abbiamo quindi trovato una soluzione particolare dell'equazione completa

$$x_p(t) = \frac{1}{4}t \sin t - \frac{1}{4}t^2 \cos t.$$

Le soluzioni della seconda equazione quindi sono (si veda la Figura I.9)

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{4}t \sin t - \frac{1}{4}t^2 \cos t.$$

\* \* \*

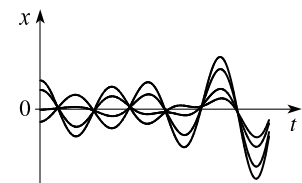


FIGURA I.9: alcune soluzioni dell'equazione di second'ordine  $x'' + x = t \sin t$ .

## **Diamoci da fare...** (Soluzioni a pagina 571)

- 1** Sia  $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supposto che una popolazione  $p = p(t)$  si evolva con un tasso percentuale di crescita  $k(t)$  e che  $p(0) = p_0 > 0$ , determinare il numero di individui all'istante  $t > 0$ . Sotto quali condizioni su  $k$  la popolazione si estingue?
- 2** Una popolazione di batteri inizialmente conta 500 individui, dopo 3 ore ne conta 8000. Supponendo che la crescita della popolazione sia proporzionale al numero dei suoi individui:
- determinare un'espressione per il numero di batteri dopo  $t$  ore;
  - determinare il numero di batteri dopo 4 ore;
  - dire dopo quanto tempo ci saranno 32000 batteri.
- 3** Una popolazione cresce con tasso relativo costante. Dopo 2 ore i batteri sono 600, dopo 8 sono 75000.
- Determinare la popolazione iniziale;
  - determinare il numero di batteri dopo  $t$  ore;
  - dopo quanto tempo ci saranno 375000 batteri?
- 4** Le sostanze radioattive decadono (emettendo spontaneamente radiazioni) ad una velocità proporzionale alla massa residua  $m(t)$  secondo una costante  $k < 0$  (il *tasso di decadimento*). I fisici spesso esprimono il tasso di decadimento in termini di *tempo di dimezzamento* ovvero il tempo necessario per il decadimento di metà di una certa quantità. Sapendo che il tempo di dimezzamento del radio è di 1590 anni, preso un campione di radio di 100 g:
- trovare la formula che dice quanto radio rimane dopo  $t$  anni;
  - trovare la massa residua dopo 1000 anni;
  - dire dopo quanto tempo la massa sarà ridotta a soli 30 mg.
- 5** Per datare gli oggetti antichi, viene spesso usato il metodo della *datazione al carbonio*. Nell'atmosfera è presente carbonio  $^{14}\text{C}$ , un isotopo radioattivo con un tempo di dimezzamento di 5730 anni. I vegetali assorbono il  $^{14}\text{C}$  e, tramite la catena alimentare, lo passano agli animali. Quando un albero o un animale muoiono, la quantità di  $^{14}\text{C}$  presente nel loro corpo comincia a diminuire secondo la legge di decadimento radioattivo. È stato scoperto un frammento di pergamena contenente circa il 75% della quantità di  $^{14}\text{C}$  presente nei vegetali in vita. Stimare l'età della pergamena.
- 6** Determinare gli intervalli di definizione delle soluzioni dell'equazione logistica con coefficienti costanti
- $$p'(t) = p(t)(k - hp(t))$$
- studiata nell'Esercizio (I.1), svolto a pagina 18, quando ammettiamo che sia il tempo  $t$  che la condizione iniziale  $p_0 = p(0)$  possano assumere anche valori negativi.
- 7** Mostrare che se  $p(t)$  soddisfa l'equazione logistica (Esercizio **6**) allora
- $$p''(t) = p(t)(k - hp(t))(k - 2hp(t)).$$
- Dedurre che se  $p_0 \in (0, 2k/h)$  allora la popolazione cresce con velocità massima quando raggiunge la metà della capacità dell'ambiente.
- 8** Si consideri l'equazione differenziale
- $$p'(t) = (k - hp(t))(p(t) - m)$$
- con  $k, h, m$  costanti positive ed  $m < k/h$ . Se  $p(t)$  rappresenta il numero di individui di una popolazione al tempo  $t$ , questa equazione è una variazione dell'equazione logistica studiata nell'Esercizio (I.1), e differisce da quest'ultima per la presenza del fattore  $(1 - m/p(t))$  a secondo membro.  $m$  indica il valore minimo sotto il quale la popolazione inizia ad estinguersi.
- L'equazione data ammette soluzioni costanti? Quali?
  - Studiare il segno del tasso di crescita della popolazione. Come varia il numero di individui se  $p_0 = p(0) \in (0, m)$ ?
  - Determinare l'espressione analitica delle soluzioni non costanti dell'equazione assumendo che per  $t = 0$  la popolazione abbia  $p_0 > 0$  individui.
  - Descrivere il comportamento della popolazione nelle seguenti situazioni:  $p_0 \in (0, m)$ ,  $p_0 \in (m, k/h)$  oppure  $p_0 > k/h$ .
- 9** Un altro modello di funzione di crescita limitata per popolazioni è la *funzione di Gompertz*, ovvero una soluzione dell'equazione differenziale
- $$p'(t) = p(t)(\log k - \log(hp(t))), \quad h, k > 0.$$
- Determinare le soluzioni costanti.
  - Studiare il segno del tasso di crescita della popolazione al variare della popolazione stessa (supporre  $p(t) > 0$ ).

(c) Determinare l'espressione analitica delle soluzioni non costanti assumendo  $p(0) = p_0 > 0$  individui.

**10** Un modello per la diffusione di un'epidemia si basa sull'ipotesi che la velocità di propagazione sia contemporaneamente proporzionale al numero di individui infetti e a quello di individui sani. In una città isolata di 5000 abitanti, 160 erano malati all'inizio della settimana e 1200 lo sono alla fine della stessa settimana. In quanto tempo verrà infettato l'80% della popolazione?

**11** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale a variabili separabili,

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}$$

prestando particolare attenzione all'intervallo di definizione delle soluzioni che non si annullano.

**12** Il corpo della vittima è stato rinvenuto sul luogo del delitto alle 2:20 di notte. Dopo mezz'ora la temperatura del corpo è di 15°C. Quando è stato commesso l'omicidio se all'ora del ritrovamento la temperatura del corpo è di 20°C e se la temperatura esterna è di -5°C?

**13** Una torta viene tolta dal forno alle 17:00 quando è bollente (100°C). Dopo 10 minuti la sua temperatura è di 80°C, alle 17:20 è di 65°C. Determinare la temperatura della stanza.

**14** Prima di appiccare fuoco ad un deposito di gas, un piromane attento vuole determinare il momento esatto dell'esplosione in funzione della quantità di gas inizialmente posta in combustione. Egli assume che la velocità con cui il gas prende fuoco sia proporzionale alla temperatura del deposito e che questa sia a sua volta proporzionale al quadrato del gas in combustione. Suppone inoltre che la quantità totale di gas sia infinita. Quando avviene l'esplosione?

**15** Sia  $y(t)$  una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(t) = y^4(t) - 3y^3(t) + 2y^2(t).$$

Per quali valori di  $y(t)$  tale funzione risulta essere strettamente crescente? Per quali strettamente decrescente? Quali soluzioni costanti ammette l'equazione?

**16** Per le seguenti equazioni determinare in quali sottospazi del piano le (eventuali) soluzioni sono funzioni crescenti, in quali punti hanno tangente orizzontale e infine dove sono decrescenti.

(a)  $y'(x) = x + y(x)$ ;

(b)  $y'(x) = y^2(x) + x^2 - 1$ ;

(c)  $y'(x) = x^2 - y^2(x)$ .

**17** Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili prestando particolare attenzione agli intervalli in cui sono definite.

(a)  $r'(t) = r(t) - r^3(t)$ , con  $r(t) \geq 0$ ;

(b)  $y'(t) = -\frac{t^3}{(y(t) + 1)^2}$ ;

(c)  $(1 + x^3)y'(x) - x^2y(x) = 0$ ;

(d)  $(1 + x)y'(x) = y(x) + 1$ ;

(e)  $x'(s) = \frac{1}{e^{x(s)}e^{e^{x(s)}}}$ ;

(f)  $y'(x) = e^{x-y(x)}$ ;

(g)  $y'(x) = \frac{2xy(x)}{x^2 - 1}$ ;

(h)  $e^{t+y(t)}y'(t) + t = 0$ .

**18** Dopo aver determinato le (due) soluzioni costanti dell'equazione

$$x'(t) = x^2(t) - 4,$$

determinare quelle che non intersecano tali soluzioni. In particolare selezionare le soluzioni passanti per i punti (0,0), (0,3) e (0,-3) e dire su quale intervallo sono definite.

**19** Trovare le soluzioni (eventualmente in forma implicita) delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili passanti per il punto indicato.

(a)  $y'(t)y(t)(e^t + 1) = e^t$ , (0, -1);

(b)  $su(s)u'(s) = 1 + s^2$ , (1, 1);

(c)  $x(1 + y^2(x))y'(x) = 3$ , (1, 0);

(d)  $y'(x) = \frac{4y(x)}{x(y(x) - 3)}$ , (1, 0);

(e)  $y'(t) \sin y(t) = \sin t + 1$ , (0,  $\pi/2$ );

**20** Determinare la curva passante per il punto (3, 2) con la seguente proprietà: tracciando la normale ad ogni punto  $P$  della curva (ovvero la retta passante per  $P$  ed ortogonale alla tangente in  $P$ ), l'intersezione tra la normale e l'asse  $y$  è sempre il punto di coordinate (0, 6).

**21** Su quale intervallo è definita l'unica soluzione dell'equazione differenziale omogenea (si veda l'Esercizio (I.3) a pagina 20)

$$y'(t) = 2\frac{y(t)}{t} - 1.$$

passante per il punto (1, 0)?

**22** Risolvere le seguenti equazioni omogenee seguendo il procedimento descritto nell'Esercizio (I.3) svolto a pagina 20.

$$(a) \quad y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x};$$

$$(b) \quad x'(t) = \frac{x(t)}{t} - e^{x(t)/t};$$

$$(c) \quad x^2 y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2;$$

$$(d) \quad y'(t) = \frac{y^2(t) + t^2}{ty(t) - t^2}.$$

**23** Trovare quale curva contenuta nel primo quadrante passa per il punto  $(1, 1)$  e soddisfa la seguente proprietà: il segmento di tangente, in un generico punto  $P$ , contenuto nel primo quadrante viene bisecato da  $P$ .

**24** Determinare le curve del piano tali che la distanza di un qualsiasi loro punto  $P$  da  $T$ , intersezione tra la tangente alla curva in  $P$  e l'asse delle  $x$ , sia uguale alla distanza di  $T$  dall'origine.

**25** Si consideri l'equazione differenziale lineare  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$  con  $a$  e  $b$  funzioni continue su un certo intervallo  $(c, d)$  con  $-\infty < c < d < +\infty$ . Dimostrare che se  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni distinte dell'equazione, ovvero se esiste  $\bar{t} \in (c, d)$  tale che  $y_1(\bar{t}) \neq y_2(\bar{t})$ , allora  $y_1(t) \neq y_2(t)$  per ogni  $t \in (c, d)$ .

**26** Date le funzioni continue  $a$  e  $b$  sull'intervallo  $(c, d)$  con  $-\infty < c < d < +\infty$  e un punto  $P = (t_0, y_0) \in (c, d) \times \mathbb{R}$ , trovare l'espressione dell'unica (si veda l'esercizio **25**) soluzione dell'equazione lineare di primo ordine  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$  passante per il punto  $P$ .

☆ **27** Si consideri l'equazione differenziale  $y'(t) = g(t)h(y(t)) + b(t)$  con  $g$  e  $b$  funzioni continue su un certo intervallo  $(c, d)$  con  $-\infty < c < d < +\infty$ , e  $h'$  continua. Dimostrare che se  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni distinte dell'equazione, ovvero se esiste  $\bar{t} \in (c, d)$  tale che  $y_1(\bar{t}) \neq y_2(\bar{t})$ , allora  $y_1(t) \neq y_2(t)$  per ogni  $t \in (c, d)$ . (Suggerimento: si applichi il risultato dell'Esercizio **25** alla differenza  $y_1(t) - y_2(t)$ .)

♣ **28** Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni lineari di primo ordine.

$$(a) \quad y'(t) + y(t) = 2t + 2;$$

$$(b) \quad y'(x) + \sin 2x + 2y(x) \frac{\cos x}{\sin x} = 0;$$

$$(c) \quad y'(x) = \frac{x-1}{x}y(x) + x^2;$$

$$(d) \quad y'(t) = 2\frac{y(t)}{t} + t^2 e^t;$$

$$(e) \quad x'(t) = e^t x(t) + e^t;$$

$$(f) \quad y'(t) = 2ty(t) + e^{t^2};$$

$$(g) \quad y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

**29** Riferendosi all'esercizio precedente, determinare le soluzioni delle equazioni (a), (b), (c), (d) e (e) passanti rispettivamente per i punti  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, 0)$ ,  $(-3, -4)$ ,  $(1, 2e)$  e  $(0, 4)$ .

**30** Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni di Bernoulli utilizzando il procedimento descritto nell'Esercizio (I.5) svolto a pagina 22.

$$(a) \quad y'(t) = 4ty(t) + e^{t^2} \sqrt{y(t)};$$

$$(b) \quad y'(x) - y(x) = xy^5(x);$$

$$(c) \quad y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = \frac{1}{3}y^4(x)(1-2x);$$

$$(d) \quad y'(x) + xy(x) + x\sqrt{y(x)} = 0;$$

$$(e) \quad y'(x) = y(x) + \frac{x}{y(x)}.$$

☆ **31** Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^2(t) + c(t),$$

con  $a, b, c$  continue (su un comune intervallo di definizione). Se  $c \equiv 0$  abbiamo un'equazione di Bernoulli, quando invece  $b \equiv 0$  ci si riduce ad una lineare. Se  $b, c \neq 0$ , un'equazione di questo tipo prende il nome di *Equazione di Riccati* e non esistono metodi generali per la sua risoluzione. Nota però una sua soluzione particolare,  $\psi$ , se ci proponiamo di cercare la soluzione generale dell'equazione nella forma

$$y(t) = \psi(t) + z(t),$$

si verifica facilmente che  $z$  deve soddisfare l'equazione di tipo Bernoulli

$$z'(t) = [a(t) + 2b(t)\psi(t)]z(t) + b(t)z^2(t).$$

Possiamo quindi ricavare la funzione  $z$  e dunque l'integrale generale dell'equazione di partenza sommandole  $\psi$ . Utilizzando questo procedimento risolvere

$$y'(t) = y^2(t) - ty(t) + 1$$

sapendo che è soddisfatta da  $\psi(t) = t$ .

♣ **32** Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni lineari di secondo ordine a coefficienti costanti omogenee.

- (a)  $y'' - 4y' = 0$ ;  
 (b)  $2y'' + y' - y = 0$ ;  
 (c)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ;  
 (d)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ;  
 (e)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ;  
 (f)  $y'' - y' + y = 0$ ;  
 (g)  $y'' + 2y' + 2y = 0$ ;

**33** Dimostrare che se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono due qualsiasi soluzioni dell'equazione lineare di second'ordine  $x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = f(t)$  allora la loro differenza risolve l'equazione omogenea associata  $x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0$ .

**34** Nota  $x_p(t)$ , soluzione dell'equazione lineare di second'ordine  $x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = f(t)$ , dimostrare che  $x(t)$  risolve tale equazione se e solo se  $x(t) = x_p(t) + x_o(t)$  dove  $x_o(t)$  è una qualsiasi soluzione dell'omogenea associata  $x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0$ .

☛ **35** Determinare le soluzioni  $y = y(x)$  delle seguenti equazioni lineari di secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee.

- (a)  $y'' + y' - 6y = 2e^{-x}$ ;  
 (b)  $y'' + y' - 2y = x^2$ ;  
 (c)  $y'' - 4y' + 3y = x + 2$ ;  
 (d)  $y'' + 2y' = x^2 - 1$ ;  
 (e)  $y'' - y = \cos x$ ;  
 (f)  $y'' + 4y = \cos x$ ;  
 (g)  $y'' + 4y = e^x \cos x$ ;  
 (h)  $y'' + 2y' = e^x$ ;  
 (i)  $y'' - 2y' + y = e^x$ ;  
 (j)  $y'' + y = (x^2 + 1)e^x$ .

**36** Per le equazioni (a), (b), (e) dell'Esercizio **35** determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  (giustificare l'esistenza e l'unicità di tale soluzione nel Capitolo VIII).

**37** (Principio di sovrapposizione) Dimostrare che se  $x_1$  e  $x_2$  risolvono  $x''_1 + bx'_1 + cx_1 = f_1$  e  $x''_2 + bx'_2 + cx_2 = f_2$ , allora  $x_1 + x_2$  è soluzione dell'equazione

$$x'' + bx' + cx = f_1 + f_2.$$

Dedurre che le soluzioni di quest'ultima equazione sono tutte e sole le funzioni della forma  $x(t) = x_o(t) + x_1(t) + x_2(t)$  con  $x_o(t)$  soluzione dell'omogenea associata  $x'' + bx' + cx = 0$ . Trovare quindi le soluzioni delle seguenti equazioni:

- (a)  $x'' + 2x' = e^t + e^{-2t}$ ;  
 (b)  $2x'' + x' - x = te^{-t} + \sin(2t)$ .

☉ **38** (Variazione delle costanti) Per determinare una soluzione particolare di un'equazione lineare di secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, si può procedere nel modo seguente. Prima si calcola la famiglia di soluzioni a due parametri dell'equazione omogenea,  $C_1u_1(t) + C_2u_2(t)$ ; quindi si cerca una soluzione dell'equazione non omogenea del tipo  $C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t)$ , con  $C_1(t)$  e  $C_2(t)$  funzioni da determinare che soddisfano la relazione

$$C'_1(t)u_1(t) + C'_2(t)u_2(t) = 0.$$

Con questo metodo determinare una soluzione particolare per le equazioni:

- (a)  $y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}$ ;  
 (b)  $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{12e^t}{t^3}$ .

**39** La Figura I.10 mostra un circuito RLC, cioè un circuito elettrico contenente un generatore di forza elettromotrice,  $E = E(t)$ , un condensatore di capacità  $C$ , un resistore di resistenza  $R$  e una induttanza  $L$ , disposti in serie.

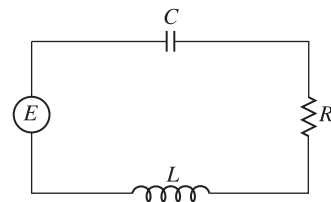


Figura I.10

Se indichiamo con  $q = q(t)$  la quantità di carica e con  $i(t)$  l'intensità di corrente che attraversa il circuito allora  $q'(t) = i(t)$ . Inoltre la forza elettromotrice  $E(t)$  è pari alla differenza di potenziale agli estremi del generatore; ricordando che la differenza di potenziale tra le armature di un condensatore è  $q(t)/C$ , quella agli estremi della resistenza è  $Ri(t)$ , mentre quella ai capi dell'induttanza è  $Li'(t)$  si ottiene

$$E(t) = Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

La corrente e la carica soddisfano quindi il sistema di equazioni lineari di primo ordine (con coefficienti costanti)

$$\begin{cases} i'(t) = \frac{E(t)}{L} - \frac{R}{L}i(t) - \frac{q(t)}{LC} \\ q'(t) = i(t). \end{cases}$$

Determinare l'equazione lineare di second'ordine a coefficienti costanti soddisfatta da  $i(t)$ .

**40** Trasformare il sistema lineare di primo ordine

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

in un'equazione lineare di second'ordine. Quindi, utilizzando questo procedimento, determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

**41** Si consideri un circuito RLC dell'Esercizio **39**. Nel caso di un generatore di forza elettromotrice alternata, ovvero se  $E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$ , l'equazione diventa

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = E_0\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

Si osservi l'analogia con l'equazione dell'oscillatore armonico studiato nell'Esercizio (1.7), svolto a pagina 24, quando  $E_0 = 0$ ; ritrovare i risultati dell'esercizio citato ponendo  $\delta = R/2L$  e  $\omega^2 = 1/(CL)$ . Verificare quindi che, nel caso generale  $E_0 \neq 0$ , la funzione  $i(t) = i_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  risolve l'equazione se si pone

$$\tan \varphi = \frac{1}{R} \left( \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right),$$

dove  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  è lo sfasamento e l'intensità massima della corrente è data da

$$i_0 = \frac{E_0}{Z},$$

con

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}$$

l'impedenza del circuito.

☆ **42** (Metodo di d'Alembert) Sia  $u(t)$  una soluzione di

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che se  $\alpha(t)$  risolve

$$a\alpha''(t)u(t) + \alpha'(t)(2a\alpha'(t) + bu(t)) = f(t)$$

allora la funzione  $\alpha(t)u(t)$  risolve l'equazione completa

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

Questo metodo permette di determinare una soluzione di un'equazione lineare di secondo ordine non omogenea (si osservi che non è necessario che i coefficienti siano costanti, si veda l'Esercizio **43**) a partire da una soluzione dell'omogenea, risolvendo un'equazione lineare di prim'ordine nella variabile  $\alpha'(t)$ .

☆ **43** Usare il Metodo di d'Alembert descritto nell'Esercizio **42** per determinare una seconda soluzione delle seguenti equazioni nota la soluzione  $u(t)$ :

(a)  $(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 0, u(t) = t;$

(b)  $t^2y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 0, u(t) = t^{\sqrt{2}}.$